Leçon 230 Séries de nombres réels ou complexes, comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques, exemples

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Suites et séries de Mohammed El Amrani
2. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
3. Analyse de Xavier Gourdon
4. Analyse complexe d'Amar et Matheron
5. Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard
6. Probabilité de Barbe et Ledoux

Développements.

1. Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
2. Calcul d'une intégrale par un développement en série entière

Table des matières

1 Séries réelles et complexes

1.1 Suite des sommes cumulées d'une suite numérique

(Chapitre 2.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle ou complexe.

1. Définition : La série associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, et est noté $\sum u_n$
2. Définition : On dit que $\sum u_n$ est convergente si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on le note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = S$
3. Exemple : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a|$, alors $\sum a^n$ est convergente de somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$
4. Définition : Si $\sum u_n$ converge alors $R_n := S - S_n$ est le reste d'ordre n de $\sum u_n$
5. Proposition : L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel
6. Théorème : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Remarque : La réciproque est fausse : $\sum ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge mais $ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
8. Définition : On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
9. Théorème : Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge
10. Remarque : La réciproque est fausse : Si $u_{2p} = -\frac{1}{p}$ et $u_{2p-1} = \frac{1}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument

1.2 Cas particulier des séries de termes positifs

(Chapitre 2.2 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de termes positifs.

1. Lemme : $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
2. Théorème : Règle de comparaison : Si $u \leq v$ alors :
   - Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ également et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$
   - Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ également
3. Exemple : $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ également
4. Théorème : Règle d'équivalence : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, en cas de cas de convergence les restes sont équivalents, en cas de divergence les sommes partielles sont équivalents
5. Remarque : La positivité est nécessaire dans le théorème précédent : $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge même si les termes sont équivalents (Exemple 7.6 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

6. Théorème : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (respectivment o) et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ (respectivement o)
7. Remarque : Le théorème précédent reste vrai en remplaçant u_n par $|u_n|$
8. Théorème de comparaison série-intégrale : Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive décroissante alors $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, en cas de convergence $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$
9. Exemple : $\sum \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha, \beta) \in \{1\} \times\ ]1, +\infty[$

1.3 Règles et critères de convergence

(Chapitres 2.1, 2.3, de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Théorème : Critère de Cauchy : $\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$
2. Exemple : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge
3. Théorème : Règle de Cauchy : Si $\sqrt[n]{|u_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ alors :
   - Si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument
   - Si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
4. Exemple : $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge
5. Théorème : Règle de D'Alembert : Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ alors :
   - Si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument
   - Si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
6. Exemple : $\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $0 < a < 1$ et diverge si $a > 1$
7. Remarque : Si $\lambda = 1$ alors on ne peut conclure : $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ (Exemples 7.14 et 7.15 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
8. Proposition : Si la règle de D'Alembert peut être appliqué alors celle de Cauchy également
9. Remarque : La réciproque est fausse : Si $u_n = \frac{1}{3^n}$ si n pair et $u_n = \frac{4}{3^n}$ si n impair alors on peut appliquer la règle de Cauchy mais pas la règle de D'Alembert (Exemple 7.16 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
10. Proposition : Transformation d'Abel : Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \geq p + 1$, alors $\sum\limits_{k=p+1}^{q} u_k v_k = u_q \sum\limits_{k=p+1}^{q} v_k + \sum\limits_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \sum\limits_{j=p+1}^{k} v_j$ (Exercice 7.9 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
11. Théorème d'Abel : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers 0 et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée alors $\sum u_n v_n$ converge (Exercice 7.9 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

12. Exemple : $\sum \frac{e^{int}}{n^\alpha}$ converge

2 Etudes de séries entières

2.1 Séries définies avec un rayon de convergence

(Chapitre 5.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. Définition : Une série entière est une série de fonctions $\sum a_n z^n$ et la somme de la série entière est la fonction $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge
2. Lemme d'Abel : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour $z \in D(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
3. Corollaire : Il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+^*$ (appelé rayon de convergence) tel que pour $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge
4. Remarque : On a $R = sup(r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée})$
5. Remarque : $D(0, R)$ est le disque de convergence, $C(0, R)$ est le cercle d'incertitude : $R\left(\sum z^n\right) = 1$ mais $\sum 1^n$ diverge, $R\left(\sum \frac{z^n}{n^2}\right) = 1$ mais $\sum \frac{1^n}{n^2}$ converge
6. Proposition : Règle de Cauchy : Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $R = \frac{1}{L}$
7. Exemple : $R\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$
8. Théorème : Formule de Hadamard : $R = \left(\underset{n\to+\infty}{limsup} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$
9. Exemple : $R\left(\sum 2^n z^{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
10. Corollaire : Règle de Cauchy : Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ alors $R = \frac{1}{L}$

2.2 Opérations et propriétés

(Chapitres 5.2, 5.3 et 5.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Proposition : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, alors $R(\sum (a_n + b_n) z^n) \geq min(R_a, R_b)$ et $R(\sum c_n z^n) \geq min(R_a, R_b)$ avec $\sum c_n z^n$ produit de Cauchy, ie $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
2. Théorème : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$
3. Corollaire : S est continue sur $D(0, R)$
4. Théorème d'Abel angulaire : Si $R = 1$ et $\sum a_n$ converge, soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, Δ_{θ_0} défini en annexe, alors $S(z) \underset{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.10 d'Analyse de Xavier Gourdon)
5. Remarque : La réciproque est fausse : $\sum (-1)^n$ diverge mais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \underset{\substack{z\to+\infty \\ |z|<1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

6. Théorème taubérien faible : Si $R=1$, il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \underset{\substack{z \to +\infty \\ |z|<1}}{\longrightarrow} S$ et $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.11 d'Analyse de Xavier Gourdon)
7. Théorème : Si $\sum a_n x^n$ série entière entière de variable réelle alors la fonction somme S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$

2.3 Fonctions développables en série entière

(Chapitre 5.5 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Définition : On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in]0, R]$ tel que $]-r, r[\subset X$ et $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
2. Remarque : On dit que f est développable en série entière en 0 si $f(\cdot - x_0)$ l'est en 0
3. Exemple : Tout polynôme est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après la formule de Taylor
4. Proposition : SI f développable en série entière en $x_0 \in X$ alors f est de classe C^∞ au voisinage de x_0
5. Remarque : La réciproque est fausse : $f = e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ est de classe C^∞ mais non développable en série entière en 0
6. Application : Un développement en série entière et une interversion série intégrale permettent de calculer des intégrales
7. Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

3 Des séries pour tous les gôuts

3.1 Analycité des fonctions holomorphes

(Chapitre 3.4 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)
On considère Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

1. Théorème : Si $f \in H(D(z_0, R))$ alors $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ avec convergence normale sur tout compact de $D(z_0, R)$
2. Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ alors f est développable en série entière au voisinage de chaque point, ie f est analytique
3. Remarque : Si $f \in H(D(0, R))$ alors les coefficients de son développement en série entière sont $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$
4. Théorème : Si Ω connexe et $f \in H(\Omega)$ tel qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$ alors $f = 0$

5. Corollaire : Principe du prolongement analytique : Si Ω connexe et $(f,g) \in H(\Omega)^2$ coïncidant sur un ouvert non vide de Ω alors $f = g$
6. Application : $H(\Omega)$ est un anneau intègre

3.2 Séries de Fourier

(Chapitre 6.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$

1. Définition : Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors le n-ième coefficient de Fourier de f est $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt$, et la série de Fourier de f est $S(f) = \sum c_n(f)e_n$ avec $e_n(t) = e^{int}$
2. Théorème de Dirichlet : Si f de classe C^1 par morceaux alors $S(f)$ converge simplement vers $\tilde{f}$ avec $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$
3. Remarque : La continuité de f ne suffit pas, le théorème de Banach-Steinhaus permet d'établir l'existence d'un contre-exemple
4. Corollaire : Si f de classe C^1 par morceaux et continue alors $S(f)$ converge normalement vers f
5. Application : Formule sommatoire de Poisson : Si f de classe C^1 avec $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{2i\pi nx}$ (Exercice 4.6.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
6. Lemme : Soit $\delta_{\mathbb{Z}} := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$, alors $\delta_{\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{R})$ $\delta_{\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(\delta_{\mathbb{Z}})$
7. Application : Inversion de Fourier : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi$

3.3 Fonctions génératrices et lemme de Borel-Cantelli

(Chapitre 5.3 de Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard et Probabilité de Barbe et Ledoux)

On considère X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Définition : $G_X = \overline{\underset{n=0}{+\infty}}\mathbb{P}(X = n)s^n$
2. Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $G_X = (sp + 1 - p)^n$
3. Théorème : G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$
4. Corollaire : G_X caractérise la loi de X
5. Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événéments, alors :
   — Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}(\underset{n\to+\infty}{limsup} A_n) = 0$
   — Si les A_n sont indépendants et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge alors $\mathbb{P}(\underset{n\to+\infty}{limsup} A_n) = 1$
6. Corollaire : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, alors :
   — Si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ converge alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} X$

— Si les X_n sont mutuellement indépendants alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$