Leçon 233 Analyse numérique matricielle, résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
2. Oraux X-ENS Analyse 4

Développements.

1. Décompositions LU et de Cholesky
2. Minimisation de fonctionnelle quadratique

Table des matières

1 Préliminaires théoriques

1.1 Normes matricielles

(Chapitre 3.1 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Soit $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{K}^n$, alors $\|A\| = \underset{x \in S(0,1)}{sup} \|Ax\|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$
2. Définition : On dit que $\|\cdot\|$ est la norme matricielle induite ou subordonnée par $x \longmapsto \|x\|$
3. Exemple : $\|A\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $\|A\|_1 = \underset{1 \leq j \leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
4. Exemple : Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\|x\| = \|P^{-1}x\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $\|A\| = \|P^{-1}AP\|_\infty$ est la norme subordonnée
5. Théorème : Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle induite, alors on a :
   (a) $\|I_n\| = 1$
   (b) $\|A\| = \underset{x \in B(0,1)}{sup} \|Ax\| = \underset{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}}{sup} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
   (c) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$
   (d) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
   (e) Il existe $x \in S(0,1)$ tel que $\|A\| = \|Ax\|$
   (f) $\|A\| = inf(\alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{K}^n, \|Ax\| \leq \alpha \|x\|)$

1.2 Rayon spectral

(Chapitre 3.4 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Définition : $Sp(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A et son rayon spectral est $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{max} |\lambda|$
2. Remarque : $\rho(A^k) = \rho(A)^k$
3. Lemme : Si A normale (ie $AA^* = A^*A$) alors $\|A\|_2 = \rho(A)$
4. Théorème : $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$
5. Théorème : Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle, alors $\rho(A) \leq \|A\|, \rho(A) \leq \underset{k \in \mathbb{N}^*}{inf} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$
6. Théorème : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe une norme matricielle telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$
7. Corollaire : $\rho(A) = \underset{\|\cdot\| \in \mathcal{N}}{inf} \|A\|$ avec $\mathcal{N}$ l'ensemble de toutes les normes matricielles
8. Théorème : ρ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$
9. Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

(b) $x_{k+1} = Ax_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(c) $\rho(A) < 1$

(d) Il existe $\|\cdot\|$ tel que $\|A\| < 1$

(e) $I_n - A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$

(f) $I_n - A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} tr(A^k) = tr\left((I_n - A)^{-1}\right)$

(g) $tr(A^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.3 Conditionnement

(Chapitre 3.5 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle.

1. Remarque : Soit $x \in \mathbb{K}^n$ solution de $Ax = b$ alors on se demande comment sera modifiée cette solution si les coefficients du second membre ou de la matrice sont modifiés
2. Théorème : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$ solution de $Ax = b$ telle que $x + \delta x$ soit solution de $Ay = b + \delta b$ alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
3. Théorème : Soit $x \in \mathbb{K}^n$ solution de $Ax = b$ telle que $x+\delta x$ soit solution de $(A+\delta A)y = b$ alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
4. Définition : $cond(A) := \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}$ est appelé le conditionnement de A relativement à $\|\cdot\|$
5. Théorème : $cond(A) \in \,]0, 1], cond(A) = cond(A^{-1}), cond(\alpha A) = cond(A)$
6. Théorème : $cond_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_{min}}{\mu_{max}}}$ avec μ_{min} et μ_{max} les plus petite et grande valeurs propres de A^*A
7. Corollaire : Si A est normale alors $cond_2(A) = \frac{\underset{1\leq i\leq n}{min} |\lambda_i|}{\underset{1\leq i\leq n}{max} |\lambda_i|}$

2 Résolutions de systèmes linéaires $Ax = b$

2.1 Méthodes de Cramer et du pivot de Gauss

(Chapitres 5.1, 5.3, 5.4 et 5.5 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

1. Proposition : Si on note A_j la matrice obtenue de A en remplaçant sa j-ièmre colonne par b alors la solution de $Ax = b$ est donnée par les formes de Cramer $x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$
2. Remarque : Cette méthode comporte $n^2 n!$ opérations élémentaires ce qui est beaucoup trop grand
3. Proposition : Si A est triangulaire supérieure alors la résolution de $Ax = b$ se fait en remonant $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right)$

4. Définitions : On appelle matrice de transvection (respectivement de dilatation) toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ (respectivement $D_i(\lambda) = I_n + \lambda E_{ii}$) avec $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}^*$, et on appelle matrice élémentaire toute matrice de transvection ou de dilatation
5. Lemme : Une matrice élementaire est inversible et $\forall (i,j,\lambda) \in [\![1,n]\!]^n \times \mathbb{K}^*, T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda), D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
6. Théorème : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe des matrices de transvections telles que $A = P_1 ... P_r D_n(det(A)) Q_1 ... Q_s$
7. Application : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et sont les connexes de $GL_n(\mathbb{R})$
8. Proposition : Méthode des pivots de Gauss : On peut transformer $Ax = b$ en $Rx = c$ avec R triangulaire supérieure par opérations élémentaires sur les lignes, en particulier $det(A) = \pm det(R)$, la méthode consiste en les étapes suivantes :
   - On se ramène à $a_{11} \neq 0$ par $L_1 \longleftrightarrow L_i$ avec $a_{i1} \neq 0$
   - On élimine x_1 dans les équations $2, ..., n$ par $L_i^{(i)} \longleftarrow L_i^{(i)} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1^{(1)}$
   - On se ramène $a_{22} \neq 0$ par $L_2^{(2)} \longleftrightarrow L_i^{(2)}$ avec $a_{i2}^{(2)} \neq 0$
   - ...
   - On élimine x_k dans les équations $k+1, ..., n$ par $L_i^{(k)} \longleftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$

   On a $det(A) = (-1)^p det(A^{(p)})$ avec p nombre de permutations nécessaires
9. Remarque : Pour éviter de faire une division par un nombre trop petit, on permute les lignes pour avoir le plus grand pivot possible
10. Remarque : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$

2.2 Décompositions LU et de Cholesky

(Chapitre 5.7 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $(A, b) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

1. Définition : Les sous-matrices principales de A sont les $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = det(A_k)$
2. Lemme : Si $a_{11} \neq 0$ alors il existe des matrices de transvection $P_1, ..., P_r$ telles que $P_r ... P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ (0) & A' \end{pmatrix}$
3. Théorème : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A peut être de réduite à la forme triangulaire supérieur en la multipliant par des matrices de transvection ou de dilatation de la forme $D_i(-1)$
4. Théorème : Décomposition LU : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe L triangulaire inférieure de diagonale unité et R triangulaire supérieure telles que $A = LU$ si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls
5. Remarque : Dans ce cas, une telle décomposition est unique et les coefficients diagonaux de R sont donnés par $r_{11} = a_{11}$ et $r_{kk} = \frac{det(A_k)}{det(A_{k-1})}$
6. Application : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Ax = b$ équivaut à résoudre $Ly = b, Rx = y$ avec $A = LU$ la décomposition précédente

7. Corollaire : Décomposition de Cholesky : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $A \in S_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^tB$
8. Remarque : De plus une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B, et $b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik}b_{jk}\right)$ et $b_{ii}^2 = a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2$
9. Remarque : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$
10. Application : La résolution de $Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes triangulaires, et $det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} b_{ii}^2$

2.3 Méthodes itératives

(Chapitre 5.11 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$ avec $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

1. Définition : La méthode itérative de la résolution de $Ax = b$ définit une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} - M^{-1}b$
2. Remarque : Si cette suite converge alors la limite est la solution de $Ax = b$
3. Définition : On dit que la méthode itérative est convergente si pour tout $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie précédemment est convergente
4. Théorème : La méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$
5. Corollaire : S'il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ tel que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la méthode itérative est convergente

2.4 Minimisation de fonctionnelles quadratiques

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi, Exercice 1.21 des Oraux X-ENS Analyse 4)
On considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que φ admette un extremum local en x_0, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle φ
5. Remarque : On considère de plus $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ unitaires, $x_{k+1} = x_k - \frac{\langle r_k, \delta_k\rangle}{\langle A\delta_k, \delta_k\rangle}\delta_k$ avec $r_k = \nabla\varphi(x_k) = Ax_k - b = A(x_k - u)$
6. Lemme : $r_{k+1} \perp \delta_k$
7. Lemme : Soit $0 < \lambda_1 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de A, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$
8. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \langle r_k, \delta_k\rangle \geq \alpha \|r_k\|_2$ alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution de $Ax = b$

3 Recherche de valeurs propres

3.1 Localisation

(Chapitre 1.2 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $A \in M_n(\mathbb{C}), L_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, C_j = \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|, L = \max\limits_{1\leq i\leq n}(L_i + |a_{ii}|)$ et $C = \max\limits_{1\leq j\leq n}(C_j + |a_{jj}|)$.

1. Théorème de Gerschgörin-Hadamard : $Sp(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{B}(a_{ii}, L_i)$
2. Corollaire : $\forall\lambda \in Sp(A), |\lambda| \leq min(L, C)$
3. Définition : On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante si $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > L_i$
4. Remarque : Si A est à diagonale strictement dominante alors A inversible
5. Théorème d'Ostrowski : $\forall\alpha \in [0, 1], Sp(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{B}(a_{ii}, L_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha})$
6. Corollaire : $\forall\lambda \in Sp(A), \exists i \in [\![1, n]\!], |\lambda|^2 \leq (L_i + |a_{ii}|)(C_i + |a_{ii}|)$

3.2 Méthode de la puissance itérée

(Chapitre 6.2 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que la valeur propre λ_1 de module maximum soit unique.

1. Théorème : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ est simple, et on a $\mathbb{R}^n = ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus Im(A - \lambda_1 I_n)$ avec $ker(A - \lambda_1 I_n)$ droite vectorielle stable par A
2. Définition : On note $E_1 = ker(A - \lambda_1 I_n), F_1 = Im(A - \lambda_1 I_n)$ et on définit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ par $x^{(0)} = e_1 + f_1$ avec $e_1 \in E_1\backslash\{0\}, f_1 \in F_1$, et $x^{(k+1)} = \frac{1}{\|Ax^{(k)}\|}Ax^{(k)}$
3. Théorème : Avec les notations précédentes, on a :
   (a) $\|Ax^{(k)}\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} |\lambda_1| = \rho(A)$
   (b) $x^{(2k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v_1, x^{(2k+1)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v_2 = signe(\lambda_1)v_1$ avec v_1 vecteur propre associé à λ_1
   (c) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $e_{1,j} \neq 0$, alors $\frac{(Ax^{(k)})_j}{x_j^{(k)}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$
4. Corollaire : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors en appliquant la méthode précédente, on peut approcher la valeur propre de A de plus petit module

3.3 Méthode de Jacobi pour les matrices symétriques

(Chapitre 6.3 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Remarque : Par théorème spectral A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on chercher à construire $(R(\theta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ suite de matrices de rotations pour que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice diagonale avec $A_{k+1} = R(\theta_k)^{-1}A_kR(\theta_k)$,

2. Définition : Soit $(p, q, \theta) \in [\![1, n]\!]^2\times\mathbb{R}$ tel que $p < q$, alors $R_{p,q}(\theta) = \begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{p,q}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}$

   avec $\rho_{p,q}(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & I_{q-p+1} & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$, $c = cos(\theta), s = sin(\theta)$

3. Lemme : Les coefficients de $A_{p,q}(\theta) := R_{p,q}(\theta)^{-1}AR_{p,q}(\theta)$ symétrique sont donnés par
$$\begin{cases} m'_{ij} = m_{ij} & si \quad i \neq p, q, j \neq p, q \\ m'_{ip} = cm_{ip} + sm_{iq} & si \quad i \neq p, q \\ m'_{pp} = c^2m_{pp} + s^2m_{qq} + 2csm_{pq} & \\ m'_{iq} = cm_{iq} - sm_{ip} & si \quad i \neq p, q \\ m'_{qq} = s^2m_{pp} + c^2m_{qq} - 2csm_{pq} & \\ m'_{pq} = (c^2 - s^2)m_{pq} - sc(m_{pp} - m_{qq}) & \end{cases}$$

4. Lemme : Si $m_{pq} \neq 0$ alors il existe un unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus\{0\}$ tel que $m'_{pq} = 0$

5. Lemme : Soit $A_{k+1} = R(\theta_k)^{-1}A_kR(\theta_k)$ avec $R(\theta_k) = I_n$ si $a^{(k)}_{pq}$ et $R(\theta_k) = R_{p,q}(\theta_k)$ avec $1 \leq p < q \leq n$ tel que $|a^{(k)}_{pq}| = \underset{1\leq i<j\leq n}{max} |a^{(k)}_{ij}|$ et $\theta_k \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus\{0\}$ tel que $a^{(k+1)}_{pq} = 0$, et $A_k = D_k + E_k$ avec D_k partie diagonale de A_k, alors $E_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

6. Théorème : $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} D_\sigma$ avec D_σ matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_{\sigma(i)}$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs prorpes de A

7. Corollaire : $\theta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ et $P_k := R(\theta_0)...R(\theta_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P_\sigma = (\pm C_{\sigma(1)}, ... \pm C_{\sigma(n)})$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $C_{\sigma(i)}$ vecteur propre de A associé à $\lambda_{\sigma(i)}$