Leçon 234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
2. Calcul intégral de Jacques Faraut
3. Objectif agrégation
4. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
5. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
6. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch
7. Probabilité de Barbe et Ledoux
8. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne

Développements.

1. Théorème de Riesz-Ficher
2. Transformation de Fourier sur L^2 et théorème de Plancherel

Table des matières

1 Espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$

1.1 Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\mu)$

(Chapitres 7.1, 7.2, 7.3 et 8.1 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable.

1. Définition : On dit que f est étagée si f prend un nombre fini de valeurs, ie f peut alors s'écrire $f = \sum\limits_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{f=\alpha}$ somme finie
2. Définition : Si f étagée alors $\int_X f d\mu := \sum\limits_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et si f mesurable positive alors $\int_X f d\mu := sup\left(\int_X \varphi d\mu, \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathbb{R}_+)\right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et on dit que f μ-intégrable si $\int_X f d\mu < +\infty$
3. Théorème de convergence monotone : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $f := \underset{n\to+\infty}{lim}(f_n)$ est mesurable positive et $\int_X f d\mu = \underset{n\to+\infty}{lim} \int_X f_n d\mu$
4. Proposition : Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurables tels que $f = g$ μ-presque partout alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$
5. Lemme de Fatou : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurables positives alors $0 \leq \int_X \underset{n\in\mathbb{N}}{liminf} f_n d\mu \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{liminf} \int_X f_n d\mu$
6. Définition : On dit que f est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable, et on note $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables μ-intégrables
7. Définition : $\int_X f d\mu := \int_X Re(f) d\mu + i \int_X Im(f) d\mu := \int_X Re(f)^+ d\mu - \int_X Re(f)^- d\mu + i \int_X Im(f)^+ d\mu - i \int_X Im(f)^- d\mu$
8. Remarque : $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$
9. Proposition : $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$ avec égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $f = \alpha |f|$ μ-presque partout
10. Théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^1(\mu))^{\mathbb{N}}$ tel que :
    — Pour μ-presque tout $x \in X, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
    — Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-presque partout
    Alors il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que :
    — Pour μ-presque tout $x \in X, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$
    — $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$, en particulier $\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$
11. Corollaire : Théorème de continuité sous le signe intégrale : Soit E espace métrique et $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $f(u, \cdot)$ mesurable, pour μ-presque tout x, $f(\cdot, x)$ continue et il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que μ-presque partout $|f(u, \cdot)| \leq |g|$ alors $F(u) = \int_X f(u, x) d\mu(x)$ continue

1.2 Espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$

(Chapitre 9.1 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$

2. Exemple : Si $(X,\mathcal{A},\mu)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$ alors $\mathcal{L}^p(\mu)=l^p(\mathbb{N})=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|^p<+\infty\right\}$
3. Proposition : $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
4. Proposition : Si $\mu(X)<+\infty$ alors $p\leq q\implies\mathcal{L}^q(\mu)\subset\mathcal{L}^p(\mu)$, de plus $p\leq q\implies l^p(\mathbb{N})\subset l^q(\mathbb{N})$
5. Application : Si $0<p\leq q$ alors la convergence L^q de variables aléatoires implique la convergence L^p
6. Définition : $\|f\|_p:=\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
7. Lemme : Inégalité de Young : Si $\alpha\in\,]0,1[$ et $(u,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$ alors $u^\alpha v^{1-\alpha}\leq\alpha u+(1-\alpha)v$ avec égalité si et seulement si $u=v$
8. Théorème de Hölder : Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ avec $(p,q)\in[1,+\infty[^2$ et $(f,g)\in\mathcal{L}^p(\mu)\times\mathcal{L}^q(\mu)$ alors $\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$ avec égalité si et seulement si $\alpha|f|^p=\beta|g|^q$ μ-presque partout
9. Corollaire : Inégalité de Minkowski : Si $p\in[1,+\infty[$ et $(f,g)\in(\mathcal{L}^p(\mu))^2$ alors $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$ avec égalité si et seulement si :
   (a) $f=0$ μ-presque partout ou $g=\alpha f$ μ-presque partout
   (b) $f\overline{g}\geq 0$ μ-presque partout
10. Remarque : $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$

1.3 Espace vectoriel quotient normé $L^p(\mu)$

(Chapitres 9.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et III.2 de Calcul de Jacques Faraut)

1. Définition : $L^p(\mu):=\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ avec $f\sim g$ si $\|f-g\|_p=0$
2. Proposition : $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé
3. Lemme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{L}^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_p<+\infty$ alors $\sum f_n$ converge μ-presque partout et sa fonction somme $F\in\mathcal{L}^p(\mu)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}f_k\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p}F$
4. Théorème de Riesz-Fisher : $L^p(\mu)$ est complet, ie toute suite de Cauchy est convergente
5. Corollaire : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathcal{L}^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ tel que $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p}f$, alors il existe une extractrice $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ et $g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},|f_{\varphi(n)}|\leq g$ μ-presque partout et $f_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}f$ μ-presque partout

2 Densité dans les espaces $L^p(\mu)$

2.1 Densité avec les fonctions continues

(Chapitres 5.3, 9.4 et 9.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Lemme fondamental d'approximation : Si f mesurable alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} 0$, de plus si $f \geq 0$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et positives, et si f est bornée alors $\underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
2. Proposition : Si $p \in [1, +\infty[$ alors l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$
3. Lemme : Soit $C \subset D \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ tel que C est dense dans D et D dense dans $L^p(\mu)$ alors C est dense dans $L^p(\mu)$
4. Théorème : L'ensemble des fonctions étagées à support compact est dense dans $L^p(\mu)$
5. Corollaire : L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$
6. Théorème : L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$
7. Proposition : $L^p(\mu)$ est séparable si et seulement si $p \in [1, +\infty[$

2.2 Convolution dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$

(Chapitre 14.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : Soit $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ boréliennes, $\forall x \in \mathbb{R}^d, f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$
2. Proposition : $f * g$ est bien définie, borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} f * g d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda_d\right)$
3. Proposition : La convolution de fonctions mesurables positives est commutative est associative
4. Exemple : $f * 0 = 0, f * 1 = 1 * f = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d, \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} = min(x,1) - max(x-1,0)$
5. Lemme : $y \longmapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{L}^1(\lambda_d) \Longleftrightarrow |f| * |g|(x) < +\infty$
6. Définition : Soit f, g mesurables, alors $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ quand cette quantité a du sens
7. Proposition : La convolution de fonctions mesurables est commutative
8. Remarque : La convolution de fonctions mesurables n'est pas associative, si $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}, g = \mathbb{1}_{[-1,0]} - \mathbb{1}_{[0,1]}, h = 1$ alors $(f * g) * h = 1 \neq 0 = f * (g * h)$
9. Théorème : Soit f, g mesurables, alors :
   — Si $(f,g) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda) \times \mathcal{L}^\infty(\lambda)$ alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$
   — Si $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\lambda) \times \mathcal{L}^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f * g$ uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$
   — Si $f, g \in L^1(\lambda)$ alors $f * g \in L^1(\lambda)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
   — Si $(f,g) \in L^p(\lambda) \times L^1(\lambda)$ alors $f * g \in L^p(\mu)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
10. Corollaire : $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre sans unité

2.3 Densité avec les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

(Chapitres 14.4 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda = 1, \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda < +\infty, \underset{n\to+\infty}{lim} \int_{(|x|>\varepsilon)} |\alpha_n| d\lambda = 0$
2. Exemple : Si $\alpha \in L^1(\lambda)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha d\lambda = 1$ alors $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ est une approximation de l'unité
3. Théorème : Si $f \in L^p(\lambda)$ alors $f * \alpha_n \in L^p$ et $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$
4. Théorème : Si f uniformément continue alors $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
5. Lemme : Si $\varphi \in C_c^n(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\lambda)$ alors $f * \varphi \in C^n(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial(f*\varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
6. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
7. Exemple : Si $\alpha(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) dy}$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante
8. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\lambda)$
9. Proposition : Soit K compact et U ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset U$, alors il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1, \varphi_{|K} = 1, \varphi_{|U^c} = 0$

3 Etude du cas particulier L^2

3.1 Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes de $L^2(I, \rho)$

(Chapitres 3.1.5 d'Objectif agrégation et II.5 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

1. Définition : Soit $\rho : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable, alors on dit que ρ est une fonction poids si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$
2. Exemple : $\rho(x) = e^{-x^2}$ est une fonction poids
3. Proposition : $L^2(I, \rho) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty\}$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$
4. Théorème : Il existe une unique suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés respectifs n, deux à deux orthogonaux, appelés polynômes orthogonaux pour ρ
5. Remarque : Ils s'obtiennent par procédé d'othogonalisation de Gram-Schmidt de la famille libre $(1, x, ...x^n, ...)$
6. Exemple : Si $I = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \rho(x) = e^{-x^2}$ alors il s'agit des polynômes de Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{2}x, ...\right), H_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d(e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx}$
7. Lemme : Soit $f \in L^2(I, \rho)$, alors il existe un unique polynôme $r_n \in \mathcal{P}_n$, appelé polynôme de meilleur approximation quadratique de f à l'ordre n, tel que $\|f - r_n\| = d(f, \mathcal{P}_n)$ et r_n
8. Théorème : Si I est borné et $f \in L^2(I, \rho)$ alors $\|f - r_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
9. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$
10. Corollaire : Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(I, e^{-x^2})$

3.2 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ par résultat de densité

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$
2. Théorème : $L^2(\mathbb{R})$ est complet
3. Proposition : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$
4. Théorème de Plancherel : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même
5. Remarque : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ ne peut pas se calculer directement a priori
6. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi xy}dx$ alors, $\varphi_A \xrightarrow[A\to+\infty]{L^2} \mathcal{F}(f)$
7. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(y)e^{2i\pi xy}dy$, alors $\psi_A \xrightarrow[A\to+\infty]{L^2} f$
8. Corollaire : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y)e^{2i\pi xy}dy$
9. Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{F}\left(\frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right)(y) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$ (Exercice III.3.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

4 Etude du cas particulier avec une mesure de probabilité

4.1 Moments d'ordre p

(Chapitre III.2 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.

1. Définition : On dit que X admet un moment d'ordre p si $X^p \in L^1$
2. Proposition : Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors X admet un moment d'ordre p si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n|^p \mathbb{P}(X = n) < +\infty$, dans ce cas $\mathbb{E}(X^p) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} n^p \mathbb{P}(X = n)$
3. Définition : Le moment d'ordre 1 est appelé espérance et $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ est appelé la variance de X
4. Exemple : $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,p)) = np, V(\mathcal{B}(n,p)) = np(1-p)$
5. Exemple : Une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance

4.2 Convergence de variables aléatoires dans L^p

(Chapitres V.3 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.1 et IV.4 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dans L^p.

1. Définition : On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$ si $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. Proposition : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carrées intégrables, d'espérance a et $Var(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} a$
3. Proposition Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} Y$ alors $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha X_n+\beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} \alpha X+\beta Y$
4. Lemme de Scheffé dans L^1 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de densités respectives f_n et X de densité f tel que pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} X$
5. Théorème : La convergence L^p implique la converge en probabilité
6. Remarque : La réciproque est fausse
7. Exemple : Si $X_n(\omega) = n$ si $\omega \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ et $X_n(\omega) = 0$ si $\omega \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} 0$ donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ mais pas dans L^1 (Exemple 19.16 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
8. Théorème de Vitali : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément intégrable et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors X intégrable et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} X$