Leçon 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Suites et séries de Mohammed El Amrani
2. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
3. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
4. Analyse complexe d'Amar et Matheron
5. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
6. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch

Développements.

1. Calcul d'une intégrale par un développement en série entière
2. Prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler
3. Transformation de Fourier sur L^2 et théorème de Plancherel

Table des matières

1 Interversion entre limites **2**
1.1 Suites de fonctions et limites 2
1.2 Séries de fonctions et limites 2

2 Interversion avec des intégrales **3**
2.1 Suites de fonctions et intégrales de Lebesgue 3
2.2 Conséquences sur les séries de fonctions et les intégrales à paramètre 3
2.3 Interversion entre intégrales 4

3 Applications des interversions **4**
3.1 Convolution entre fonctions et approximations de l'unité 4
3.2 Propriétés de la transformation de Fourier 5
3.3 Fonctions caractéristiques et convergence en loi 5

1 Interversion entre limites

1.1 Suites de fonctions et limites

(Chapitre 3.2 et 3.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

1. Théorème de la double limite : Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ et $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b_n$ alors $\underset{n\to+\infty}{lim}\underset{x\to a}{lim} f_n(x) = \underset{x\to a}{lim}\underset{n\to+\infty}{lim} f_n(x)$
2. Théorème : Si f_n continue et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ alors f continue
3. Remarque : La convergence simple ne suffit pas
4. Exemple : $f_n(x) = e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta_0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec δ_0 non continue
5. Théorème : Si f_n dérivable, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} g$ alors f dérivable et $f' = g$
6. Remarque : La convergence uniforme des f'_n est nécessaire
7. Exemple : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} |x|$ non dérivable

1.2 Séries de fonctions et limites

(Chapitres 4.2, 4.3 et 4.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Théorème d'interversion entre limite et série : Si $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n$ et $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum l_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$
2. Remarque : Autrement dit on peut intervertir limite et sommation
3. Théorème de continuité sous le signe somme : Si f_n continue et $\sum f_n$ converge uniformément (sur tout compact) alors $\sum f_n$ continue
4. Exemple : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ et $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ continue sur $]1, +\infty[$
5. Remarque : La convergence simple ne suffit pas
6. Exemple : $\sum(1-x)x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ de fonction somme δ_1 non continue (Exemple 13.9 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
7. Théorème de dérivation sous le signe somme : Si f_n dérivable, $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f'_n$ converge uniformément (sur tout compact) alors $\sum f_n$ dérivable et $(\sum f_n)' = \sum f'_n$
8. Exemple : $\zeta'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{ln(n)}{n^x}$

2 Interversion avec des intégrales

2.1 Suites de fonctions et intégrales de Lebesgue

(Chapitres 8.1 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
On considère $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue.

1. Théorème de convergence monotone : Si f_n mesurable positive alors $\underset{n\to+\infty}{lim} f_n$ est mesurable et $\int_I \underset{n\to+\infty}{lim} f_n d\lambda = \underset{n\to+\infty}{lim} \int_I f_n d\lambda \leq +\infty$
2. Lemme de Fatou : Si f_n mesurable positive alors $0 \leq \int_I \underset{n\to+\infty}{liminf} f_n d\lambda \leq \underset{n\to+\infty}{liminf} \int_I f_n d\lambda \leq +\infty$
3. Corollaire : Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f$, $f_n \in L^1$ et $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$ alors $f \in L^1$
4. Corollaire : Si f croissante sur $[0,1]$ continue en 0 et 1 et dérivable presque partout alors $\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0)$
5. Théorème de convergence dominée : Si $f_n \in L^1$, pour presque tout $x \in I, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et il existe $g \in L^1$ tel que pour presque tout $x \in I, |f_n(x)| \leq g(x)$ alors $f \in L^1$ et $\int_I |f_n - f| d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
6. Application : Si f presque partout dérivable sur $[0,1]$ et f' bornée alors $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$

2.2 Conséquences sur les séries de fonctions et les intégrales à paramètre

(Chapitres 8.2 et 8.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et 3.5.3 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Théorème d'interversion série-intégrale : Si f_n mesurable et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| d\lambda < +\infty$ alors $\sum f_n \in L^1$ et $\int_I \sum f_n d\lambda = \sum \int_I f_n d\lambda$
2. Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ (Exercice 5.27 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
3. Application : Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, alors $\lambda\left(\underset{n\to+\infty}{limsup} A_n\right) = 0$
4. Théorème de continuité sous le signe intégrale : Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $f(x,\cdot)$ mesurable, $f(\cdot,t)$ continue presque partout et il existe $g \in L^1$ tel que $|f(x,\cdot)| \leq |g|$ presque partout, alors $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue
5. Application : $u \longmapsto \int_a^u f(x)dx$ est continue

6. Théorème de dérivation sous le signe intégrale : Si $f(x,\cdot) \in L^1$, $f(\cdot,t)$ dérivable presque partout et il existe $g \in L^1$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \leq |g|$ presque partout, alors $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ est dérivable et $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$
7. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $f(z,\cdot)$ mesurable, et $f(\cdot,t)$ holomorphe et il existe $g \in L^1$ tel que $|f(z,\cdot)| \leq |g|$ alors $F(z) = \int_I f(z,t)dt$ est holomorphe et ses dérivées s'obtiennent en dérivant termes à termes
8. Définition : $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est la fonction Gamma d'Euler
9. Proposition : La fonction Γ d'Euler se prolonge de façon unique en une fonction holomorhphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
10. Corollaire : Elle se prolonge de façon unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$

2.3 Interversion entre intégrales

(Chapitre 11.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème de Fubini-Tonnelli : Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable alors $\int_J f(\cdot,y)dy$ et $\int_I f(x,\cdot)dx$ mesurables et $\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \int_J f(x,y)dydx = \int_J \int_I f(x,y)dxdy \leq +\infty$
2. Exemple : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}dx = \sqrt{\pi}^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$
3. Théorème de Fubini : Si $f \in L^1(I \times J)$ alors $f(\cdot,y), f(x,\cdot), \int_J f(\cdot,y)dy, \int_I f(x,\cdot)dx \in L^1$ et $\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \int_J f(x,y)dydx = \int_J \int_I f(x,y)dxdy$
4. Remarque : L'hypothèse d'intégrabilité de f est cruciale
5. Exemple : Si $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ alors $\int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = 0 \neq ln(2) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dydx$
6. Application : Théorième d'intégration par parties sur $\mathbb{R}$: Si $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt$

3 Applications des interversions

3.1 Convolution entre fonctions et approximations de l'unité

(Chapitres 14.3, 14.4 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$ quand cela à du sens
2. Théorème : Si $(f,g) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
3. Corollaire : $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de Banach sans unité
4. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une unité approchée si $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n d\lambda = 1, \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| d\lambda < +\infty$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_{(|x|>\varepsilon)} |\alpha_n| d\lambda = 0$
5. Exemple : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \alpha d\lambda = 1$ et $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité

6. Théorème : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f * \alpha_n \xrightarrow[a \to 0]{L^p} f$
7. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
8. Exemple : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment avec $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx}$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\mathbb{1}_{]-1,1[}$
9. Théorème : Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$
10. Corollaire : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

3.2 Propriétés de la transformation de Fourier

(Chapitre III.2.1, III.2.2 et III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$
2. Théorème : $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ de norme 1 et pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
3. Théorème d'inversion : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \circ -id_{\mathbb{R}}))$
4. Corollaire : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective
5. Théorème de Plancherel : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même
6. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi xy}dx$ alors, $\varphi_A \xrightarrow[A\to+\infty]{L^2} \mathcal{F}(f)$
7. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(y)e^{2i\pi xy}dy$, alors $\psi_A \xrightarrow[A\to+\infty]{L^2} f$
8. Corollaire : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y)e^{2i\pi xy}dy$
9. Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{F}\left(\frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right)(y) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$ (Exercice III.3.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
10. Théorème : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tel que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$ (Exercice III.3.11 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
11. Théorème : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $x \longmapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)'(\xi) = -2i\pi\mathcal{F}(xf(x))(\xi)$ (Exercice III.3.11 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

3.3 Fonctions caractéristiques et convergence en loi

(Chapitres III.6 et IV.4 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire.

1. Définition : $\phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}d\mathbb{P}_X(dx)$ est appelée fonction caractéristique de X
2. Proposition : ϕ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
3. Théorème : Si $X^k \in L^1(\mathbb{R})$ alors ϕ_X est k-fois dérivable et $\phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$

4. Exemple : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
5. Définition : On dit que $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} X$ si $\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}(\varphi(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(X))$
6. Théorème de Lévy : $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{CVS}} \varphi_X$
7. Application : Théorème central limite : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes identiquement distribuées telles que $m = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$ et $\sigma^2 = Var(X_1) \in]0, +\infty[$, alors
$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - m \right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} \mathcal{N}(0,1)$