Leçon 246 Séries de Fourier, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Queffélec et Zuily
2. Suites et séries de Mohammed El Amrani
3. Analyse de Xavier Gourdon

Développements.

1. Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente
2. Théorème de convergence de Féjer

Table des matières

1 Coefficients et séries de Fourier

1.1 Espaces de fonctions périodiques et notations

(Chapitre IV.I.1 et IV.I.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définition : $C_{2\pi}$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues 2π-périodique
2. Exemple : $sin \in C_{2\pi}$
3. Proposition : $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace de Banach de l'espace $(C_b, \|\cdot\|_\infty)$
4. Définition : c_0 est l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telles que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
5. Exemple : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in c_0$
6. Proposition : $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach
7. Définition : Soit $p \in [1, +\infty]$, alors $L^p_{2\pi}$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables 2π-périodiques telles que $\int_\mathbb{R} |f|^p dx < +\infty$
8. Définition : $e_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int} \in \mathbb{C} \in C_{2\pi}$ et $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel engendré par les e_n
9. Remarque : Les éléments de $\mathcal{P}$ sont des combinaisons linéaires de e_n et est appelé polynôme trigonométrique
10. Exemple : $cos = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_{-1} \in \mathcal{P}$

1.2 Définitions des coefficients et des séries de Fourier

(Chapitres IV.1.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily et 6.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e_n(t)dt$, et on note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e_n$
2. Exemple : $c_n(\mathbb{1}_{]\pi-a,\pi+a[}) = \frac{sin(an)}{n\pi}\mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(n) + \frac{a}{\pi}\delta_0$
3. Remarque : Si f est à valeurs réelles alors on peut s'intéresser aux coefficients de Fourier réels $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt, b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$
4. Proposition : $c_n(f) = \frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}, c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
5. Proposition : Si f paire (respectivement impaire) alors $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)cos(nt)dt$ et $b_n(f) = 0$ (respectivement $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)sin(nt)dt$)
6. Exemple : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique tel que $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ alors $a_n(f) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}$ et $b_n(f) = 0$
7. Définition : La série de Fourier de f est la série de fonction $\sum c_n(f)e_n$

1.3 Propriétés des coefficients de Fourier

(Chapitre IV.I.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Proposition : $\|\tau_a(f) - f\|_p \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$
2. Théorème : $c_n(f \circ -id_{\mathbb{R}}) = c_{-n}(f), c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}, c_n(\tau_a(f)) = e^{ina}c_n(f), c_n(e_k f) = c_{n-k}(f), f * e_n = c_n(f)e_n$
3. Proposition : Si $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors $c_n(f') = inc_n(f)$
4. Proposition : Si $\sum\limits_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n \underset{N\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ alors $f \in C_{2\pi}$ et $\alpha_n = c_n(f)$
5. Lemme de Riemann-Lesbesgue : $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
6. Proposition : $\gamma : f \in L^1_{2\pi} \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ est un morphisme d'algèbre continue de norme 1 non surjective
7. Exemple : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} cos(nx)$ est une série trigonométrique mais pas une série de Fourier

2 Convergence des séries de Fourier

2.1 Noyau de Dirichlet et de Féjer

(Chapitres IV.II.2 et IV.II.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définition : Le noyau de Dirichlet est $D_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} e_n$
2. Proposition : D_N pair, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1, D_N(x) = \frac{sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}, S_N(f) = f * D_N$
3. Définition : Le noyau de Féjer est $K_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} D_n$
4. Remarque : Il s'agit de la suite des moyennes de Cesàro du noyau de Dirichlet
5. Proposition : $K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n, K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, \|K_N\|_1 = 1, 0 < \delta \leq \pi \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sigma_N(f) := \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} S_n(f) = f*K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$

2.2 Première difficulté et solution de Féjer

(Chapitres A d'Analyse de Xavier Gourdon et IV.III.2 et IV.III.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Théorème de Banach-Steinhaus : Soit E, F de Banach et $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E,F)^I$ tel que $\underset{i\in I}{sup}\|T_i(x)\| < +\infty$ alors $\underset{i\in I}{sup}\|T_i\| < +\infty$
2. Corollaire : Il existe $f \in C_{2\pi}$ tel que $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{sup}|S_n(f)(0)| = +\infty$, en particulier la suite des $S_N(f)$ diverge en 0

3. Théorème de convergence de Féjer : Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ et si $f \in L^p_{2\pi}$ alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{L^p}{\longrightarrow}} f$
4. Corollaire : Si $f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\gamma(f) = \gamma(g) \Longleftrightarrow f = g$
5. Corollaire : Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ de classe C^1 par morceaux alors $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$
6. Application : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{2\pi}(\mathbb{R})$
7. Théorème de Dirichlet : Si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que f admette des limites à droite et à gauche de x_0 et des dérivées à droite et à gauche en x_0 alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

2.3 Cas particulier des fonctions de carré intégrable

(Chapitres IV.I.2, IV.III.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily et 4.5.3 d'Analyse de Gourdon)

1. Proposition : $L^2_{2\pi}$ muni du produit hermitien $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert
2. Corollaire : $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$
3. Proposition : $S_n(f)$ est la projection de f sur $Vect(e_k, -n \leq k \leq n)$
4. Proposition : Inégalité de Bessel : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$
5. Théorème : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$
6. Corollaire : Identité de Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n(f)|^2$
7. Théorème : L'application $f \in L^2([0, 2\pi]) \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie bijective
8. Application : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (Exercice 4.5.5.1 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

3 Utilisations des coefficients et séries de Fourier

3.1 Comparaison entre le comportement d'une fonction et de sa série de Fourier

(Chapitre IV.V.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Proposition ; Si $f \in C^k_{2\pi}$ alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$
2. Proposition : Si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ alors $f \in C^{k-2}_{2\pi}$
3. Corollaire : $f \in C^\infty_{2\pi} \Longleftrightarrow \gamma(f) \in \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{N}, |n^k a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$
4. Proposition : Si $f \in C_{2\pi}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) \geq 0$ alors $(S_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et $\gamma(f) \in l^1(\mathbb{Z})$

3.2 Transformation de Fourier et formule sommatoire de Poisson

(Problème 4.6.4 d'Analyse de Gourdon)

1. Définition : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$ est la transformée de Fourier de f
2. Théorème : Formule sommatoire de Poisson : Si $f \in C^1$ tel que $f(x), f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(n)e^{inx}$
3. Corollaire : $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ est une distribution tempérée et $\mathcal{F}(\delta_{\mathbb{Z}}) = \delta_{\mathbb{Z}}$
4. Application : Théorème d'inversion : Si $f \in S(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi$

3.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles

(Chapitre IV.VI.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)
On considère $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$.

1. Définition : L'équation de la chaleur de la barre métalique : Trouver une fonction $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(0,t) = u(L,t) = 0, u(x,0) = h(x)$ avec $h \in C^1([0,L])$ tel que $h(0) = h(L)$
2. Remarque : La série de Fourier de h est normalement convergente
3. Lemme : Si $u(x,t) = f(x)g(t)$ alors $f''(x) = \lambda f(x), g'(t)\lambda g(t)$
4. Proposition : Dans ce cas $u_n(x,t) = b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) xe^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$
5. Corollaire : On cherche alors u de la forme $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) xe^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$
6. Proposition : Dans ce cas, soit $\tilde{h}$ la $2L$-périodisé de h, alors $\tilde{h} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
7. Corollaire : $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$,
8. Application : u définie précédemment vérifie l'équation de la chaleur de la barre métalique