# Leçon 250 Transformation de Fourier, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

**Références.**

1. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
2. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch
3. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
4. Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de François Golse
5. Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet

**Développements.**

1. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et théorème de Plancherel
2. Résolution de l'équation des ondes dans $S(\mathbb{R})$

## Table des matières

# 1 Transformation de Fourier

## 1.1 Transformée dans $L^1(\mathbb{R})$

(Chapitre III.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Lemme : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi} \in L^1(\mathbb{R})$
2. Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier de $f$ est $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$, et l'application $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{F}(f)$ est appelée la transformation de Fourier
3. Remarque : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$
4. Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]})(\xi) = \frac{sin(2\pi ay)}{\pi y}$ (Exercice III.3.2.13 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
5. Lemme : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\|f - f \circ (id_{\mathbb{R}} - t)\|_1 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$
6. Théorème : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R})$, ie $\mathcal{F}(f)$ continue et $\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

## 1.2 Propriétés

(Chapitres III.2.1 et III.2.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Lemme : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
2. Théorème : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
3. Corollaire : $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre sans unité
4. Lemme : Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)(\xi) = f(\xi)$
5. Corollaire : L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue et de norme 1
6. Lemme : Soit $P \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $p(\xi) = \int_{\mathbb{R}} P(x)e^{2i\pi x\xi}d\xi$ soit une densité de probabilité, alors pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $(f * p_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi}P(a\xi)d\xi$ avec $p_a(t) = \frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right)$
7. Exemple : Si $P(x) = e^{-2\pi|x|}$ alors $p(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ est appelé densité de Cauchy
8. Théorème d'inversion : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \circ (-id_{\mathbb{R}})))(x)$
9. Corollaire : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective

## 1.3 Transformées de mesure et fonctions caractéristiques

(Chapitres III.6 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Définition : Soit $\mu$ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$, alors la transformée de Fourier de $\mu$ est $\mathcal{F}(\mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\mu(d\xi)$
2. Définition : Soit $X$ variable aléatoires réelle, alors la fonction $\varphi_X$ caractéristique de $X$ est la transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}_X$, ie $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathbb{P}_X(dx)$
3. Remarque : Par théorème de transfert on a $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$

4. Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$
5. Exemple : Si $X$ est de densité $f$ alors $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$
6. Proposition : $\phi_X$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
7. Théorème : Si $X$ admet un moment d'ordre $k$ alors $\phi_X$ est $k$-fois dérivable et $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$
8. Proposition : Si $X, Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$
9. Théorème de Lévy : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires, alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} X \iff \varphi_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{CVS}} \varphi_X$
10. Application : Théorème central limite : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance $m$ et une variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

# 2 Prolongement à $L^2(\mathbb{R})$

## 2.1 Résultats préliminaires de densité

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : On note $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$
2. Exemple : $e^{-2\pi|x|} \in A(\mathbb{R})$
3. Proposition : Soit $f \in A(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \in A(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$
4. Lemme : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x)g(x)dx$
5. Proposition : Soit $f \in A(\mathbb{R})$, alors $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$
6. Lemme : $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$
7. Théorème : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$

## 2.2 Théorème de Plancherel et conséquences

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Théorème de Plancherel : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$
2. Remarque : Comme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ fait intervenir de la densité, on ne peut pas toujours calculer directement la transformée de Fourier d'un fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$
3. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi x\xi}d\xi$, alors $\varphi_A \underset{A\to+\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_2}} \mathcal{F}(f)$
4. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi$, alors $\psi_A \underset{A\to+\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_2}} f$

5. Théorème : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$
6. Exemple : Soit $f(x) = \frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(\xi)$ (Exercice III.3.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

### 2.3 Diagonalisation de l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$

(Exercice III.3.29 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : On note $\omega(t) = e^{-t^2}$ et $L^2(I, \omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\int_R |f(t)|^2 \omega(t) dt < +\infty$ (quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout)
2. Théorème : Les polynômes sont denses dans $L^2(\omega)$
3. Définition : Les polynômes de Hermite $H_n$ sont définis par $\omega^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\omega(t)$
4. Exemple : $H_1 = 1, H_2 = X, H_3 = X^2 - 1, H_4 = X^4 - 6X^2 + 3$
5. Proposition : Les $H_n$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2(\omega)$, de degrés respectifs $n$ et de coefficients dominants $2^n$
6. Définition : Les fonctions de Hermite $h_n$ sont définies par $h_n(t) = (2^n\sqrt{n}\pi!)^{-\frac{1}{2}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$
7. Théorème : Les $h_n$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres, associés aux valeurs propres $(-i)^n$, de la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$
8. Remarque : Ces valeurs propres se déduisent également du fait que $\mathcal{F}^4 = id_{A(\mathbb{R})}$ puis $\mathcal{F}^4 = id_{L^2(\mathbb{R})}$

# 3 Transformée dans l'espace de Schwarz

### 3.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 5.1 et 5.2 de Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles et 5.1.2 de Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet)

1. Définition : On note $S(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide, ie les $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\underset{x\in\mathbb{R}^d}{sup} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi \right\|_\infty < +\infty$
2. Exemple : Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$
3. Exemple : Soit $\varphi(x) = P(x)e^{-\alpha\|x\|^2}$ avec $P$ polynomiale, alors $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$
4. Définition : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut donc considérer $\mathcal{F}(\varphi)$
5. Proposition : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(\varphi) \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $\frac{\partial \mathcal{F}(\varphi)}{\partial \xi_j}(\xi) = \mathcal{F}(-2i\pi x_j \varphi)(\xi)$ et $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2i\pi\xi_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$
6. Remarque : Autrement dit la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini

7. Proposition : Formule sommatoire de Poisson : Soit $f$ de classe $C^1$ avec $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{2i\pi nx}$ (Exercice 4.6.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
8. Corollaire : Théorème d'inversion de Fourier : La transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de $S(\mathbb{R}^d)$ sur lui même et pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}d\xi$
9. Théorème : Formule de Parseval : Soit $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$, alors $\langle f, g\rangle_2 = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle_2$

## 3.2 Transformation de Fourier de distributions tempérées

(Chapitres 5.3 et 5.4 de Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de David et Gosselet)

1. Définition : On dit que $T$ est une distribution tempérée si $T$ est une forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \langle T, \varphi\rangle \leq C \underset{\alpha,\beta\leq p}{max} \left\| x^\alpha \varphi^{(\beta)} \right\|_\infty$
2. Remarque : Leur ensemble $S'(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
3. Exemple : Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\langle T(f), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ définit une distribution tempérée
4. Proposition : $S'(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par une fonction à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées
5. Définition : Soit $T \in S'(\mathbb{R})$, alors $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$ définit la transformation de Fourier de $T$
6. Exemple : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(T(f)) = T(\mathcal{F}(f))$
7. Exemple : $\mathcal{F}(\delta_a)(\xi) = e^{-i\pi\xi a}$ au sens des distributions
8. Remarque : On ne peut a priori pas définir la transformation de Fourier d'une distribution quelconque

## 3.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles

(Exercice 5.2 de Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet, Chapitres 7.2 et 7.3 de Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet)

Pour des soucis de simplification, on considère la convention $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$.

1. Proposition : L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ d'inconnue $u \in S(\mathbb{R}^2)$ se réécrit $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial t} + \xi^2\mathcal{F}(u) = 0$
2. Théorème : Equation de la chaleur unidimensionnelle : Une solution dans $S(\mathbb{R}^d)$ de $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(0,x) = u_0(x)$ est $u(t,x) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{y^2}{t}}$
3. Théorème : Equation de la chaleur multidimensionnelle : Une solution dans $S(\mathbb{R}^2)$ de $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\Delta u = 0, u(0,x) = u_0(x)$ est $u(t,x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{-\|x\|^2}{4\alpha t}} u_0(x-y)dy$
4. Remarque : La fonction $x \longmapsto \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{-\|x\|^2}{4\alpha t}}$ est appelée noyau de la chaleur
5. Théorème : Equation des ondes : $u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$ est solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0, u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$