Le Mans Université

Licence 2

Année Universitaire 2022-2023

Jeudi 10 novembre 2022

Examen 1 - Algèbre linéaire 2 - Première Session

- *Le problème et les exercices sont indépendants.*
- *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
- *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
- *Tout document de cours est interdit.*

---

1 Questions de cours

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}$ un base de F. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

1. En précisant les notations, expliquer comment obtenir l'expression de f à partir de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.
   (a) Donner la définition de matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (b) Soit $u \in E$. Quel est le lien entre le vecteur colonne X des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$? Le démontrer.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Quelle est la relation entre $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(g)$? Démontrer.
4. Montrer que le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

2 Exercice

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)) = det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(g)).$$

3 Problème

Dans tout le problème, on note un espace vectoriel E de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base quelconque de E.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux scalaires fixés, et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = b(e_1 + e_2 + e_3), \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + ae_3.$$

Partie I

1. Déterminer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $u \in E$ un vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont x, y et z. Donner l'expression de u et $f(u)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

3. Déterminer $Ker(f)$ lorsque $a \neq 1$ et $b \neq 0$. L'application linéaire est-elle un isomorphisme ?
4. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$ si $a = 1$ et $b = 0$.

Partie II

Dans toute cette partie, on considère maintenant que $a = -1$ et $b = 1$.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de E définie par :

$$e'_1 = e_1 - e_3, \quad e'_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + e_3.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Vérifier que
$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. En déduire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ de f la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}'$ de $f + 2Id_E$, $f - 2Id_E$ et $f + Id_E$.
6. En déduire $Ker(f + 2Id_E)$, $Ker(f - 2Id_E)$ et $Ker(f + Id_E)$.
7. (Bonus) Enfin montrer que $E = Ker(f+2Id_E) \oplus Ker(f-2Id_E) \oplus Ker(f+Id_E)$ (c'est à dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme une unique combinaison linéaire de vecteurs de ces trois espaces).