

Algèbre linéaire 2 - Interro 1 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

Question 1. La définition de $\text{Im}(f)$ est

$$\text{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in E\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F car :

1. $\text{Im}(f) \subset F$ car l'application f est à valeurs dans l'espace vectoriel F .
2. $0_F \in \text{Im}(f)$ car l'application f est linéaire :

$$0_F = f(0_E) \in \text{Im}(f).$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in \text{Im}(f)$. Alors, par définition de $\text{Im}(f)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$

Donc, par linéarité de l'application f ,

$$\lambda y_1 + y_2 = \lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{\in E}) \in \text{Im}(f).$$

Question 2. Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit matriciel

$$AB := (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

est défini par

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

où l'on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Question 3.

1. On suppose $n > p$.

Par théorème du rang, nous avons

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Donc

$$\dim(\ker(f)) = n - \dim(\text{Im}(f)) \geq n - \dim(F) = n - p > 0,$$

où l'inégalité centrale est justifiée par l'inclusion $\text{Im}(f) \subset F$. Ainsi nous ne pouvons pas avoir $\dim(\ker(f)) = 0$ i.e. $\ker(f) = \{0\}$. Donc nous ne pouvons pas avoir l'injectivité de l'application f . En conclusion l'assertion est vraie.

2. On suppose que l'application f est surjective. Alors $\text{Im}(f) = F$. Ainsi

$$\dim(\text{Im}(f)) = p.$$

Donc le théorème du rang donne

$$n = \dim(E) = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{\geq 0} + \dim(\text{Im}(f)) \geq \dim(\text{Im}(f)) = p.$$

Autrement dit $n \geq p$ avec $n > p$ dans certains cas que l'on peut expliciter. En effet par exemple pour $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par

$$\forall (x, y) \in E, \quad f(x, y) := x,$$

nous avons la surjectivité de l'application f et $n = 2 > 1 = p$. L'assertion est donc fausse. (Le contre-exemple suffisait à conclure)

Question 4. Montrons que l'application $\Phi := \Phi_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}$ est linéaire.

1. Nous avons

$$\Phi(0_{\mathcal{L}(E, F)}) = \left(M_{\mathcal{F}}(0_{\mathcal{L}(E, F)}(e_1)) \quad \dots \quad M_{\mathcal{F}}(0_{\mathcal{L}(E, F)}(e_p)) \right) = 0_{M_{np}(\mathbb{R})}.$$

2. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\underline{\Phi(\lambda f + g)} = \left(M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_1)) \quad \dots \quad M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_p)) \right),$$

avec, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_j)) = M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)).$$

Or si l'on note

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i, \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} f_i,$$

alors, par linéarité des applications f et g ,

$$\lambda f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ij} + b_{ij}) f_i.$$

Donc

$$M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)) = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} + (b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda M_{\mathcal{F}}(f(e_j)) + M_{\mathcal{F}}(g(e_j)).$$

Par conséquent

$$\Phi(\lambda f + g) = \lambda M_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f) + M_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(g) = \underline{\lambda \Phi(f) + \Phi(g)}.$$