Algèbre linéaire 2 - Interro 1 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

Question 1. La définition de $\mathrm{Im}(f)$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in E\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F car :

1. $\mathrm{Im}(f) \subset F$ car l'application f est à valeurs dans l'espace vectoriel F.
2. $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ car l'application f est linéaire :
$$0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f).$$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que
$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$
Donc, par linéarité de l'application f,
$$\underline{\lambda y_1 + y_2} = \lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{\in E}) \underline{\in \mathrm{Im}(f)}.$$

Question 2. Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit matriciel

$$AB := (c_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

est défini par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

où l'on note $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$.

Question 3.

1. On suppose $n > p$.
Par théorème du rang, nous avons
$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$
Donc
$$\dim(\ker(f)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq n - \dim(F) = n - p > 0,$$
où l'inégalité centrale est justifiée par l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Ainsi nous ne pouvons pas avoir $\dim(\ker(f)) = 0$ i.e. $\ker(f) = \{0\}$. Donc nous ne pouvons pas avoir l'injectivité de l'application f. En conclusion l'assertion est vraie.
2. On suppose que l'application f est surjective. Alors $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = p.$$
Donc le théorème du rang donne
$$n = \dim(E) = \underbrace{\dim(\ker(f)}_{\geq 0} + \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq \dim(\mathrm{Im}(f)) = p.$$
Autrement dit $n \geq p$ avec $n > p$ dans certains cas que l'on peut expliciter. En effet par exemple pour $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par
$$\forall (x, y) \in E, \quad f(x, y) := x,$$
nous avons la surjectivité de l'application f et $n = 2 > 1 = p$. L'assertion est donc fausse. (Le contre-exemple suffisait à conclure)

Question 4. Montrons que l'application $\Phi := \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ est linéaire. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\underline{\Phi(\lambda f + g) =}\begin{pmatrix} M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_1)) & \dots & M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_p)) \end{pmatrix},$$

avec, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_j)) = M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)).$$

Or si l'on note

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i,$$

alors, par linéarité des applications f et g,

$$\lambda f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ij} + b_{ij}) f_i.$$

Donc

$$M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)) = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} + (b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda M_{\mathcal{F}}(f(e_j)) + M_{\mathcal{F}}(g(e_j)).$$

Par conséquent

$$\Phi(\lambda f + g) = \lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(g) \underline{= \lambda \Phi(f) + \Phi(g)}.$$