Le Mans Université, Licence 2 - Année 2023/24

TD 6 : Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_8 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

où $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 bis. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les trois vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$?

Exercice 3. Soient $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que pour $n > 2$, le déterminant suivant est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, telle que $f^2 = f \circ f = -Id_E$. Que peut-on dire de la dimension de E ?

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice anti-symétrique

$$A = -{}^tA.$$

1. Que peut-on dire des coefficients diagonaux ?
2. Montrer que si n est impair, alors $\det(A) = 0$.