L2 - Algèbre linéaire - TD8 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

1 Exercice 4

Pour la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On trouve $P_{A_1} = (1-X)(2-X)^2$.
2. P_{A_1} est scindé donc la matrice A_1 est trigonalisable.
3. $\mathrm{Sp}(A_1) = \{1, 2\}$.
4. Nous avons directement $1 \leq \dim(E_1(A_1)) \leq \alpha_1 = 1$ i.e. $n_1 = \dim(E_1(A_1)) = 1$ et

$$E_1(A_1) = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(u_1).$$

   Puis pour $E_2(A_1)$, soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} & u \in E_2(A_1) \\ \iff & A_1 u = 2u \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & 2x \\ 2x & & & + & z & = & 2y \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\ \iff & x = y, z = 0 \end{aligned}$$

   Donc

$$E_2(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(u_2),$$

   et $n_2 = \dim(E_2(A_1)) = 1$.
5. $n_2 = 1 < 2 = \alpha_2$ donc A_1 n'est pas diagonalisable.
6. On cherche $1 = \alpha_2 - n_2$ vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_1 u_3 = 2u_3 + au_1 + bu_2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Or nous avons

$$\begin{aligned} & A_1 u_3 = 2u_3 + au_1 + bu_2 \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & 2x+b \\ 2x & & & + & z & = & 2y+a+b \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z+a \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & b \\ 2x & - & 2y & + & z & = & a+b \\ x & - & y & & & = & a \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{cccccc} & & & z & = & b-a \\ x & - & y & & = & a \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Ainsi on peut choisir $a = 0, b = 1$ et dans ce cas

$$A_1 u_3 = 2u_3 + u_2 \iff x = y, z = 1.$$

On considère donc le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour avoir bien avoir $A_1 u_3 = 2u_3 + u_2$.

7. Nous avons alors

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = PTP^{-1}.$$

Nous pouvons donc en déduire son polynôme minimal

$$m_A = m_T = (X-1)(X-2)^2.$$

Nous pouvions aussi le conclure directement car $m_A \mid P_A$, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{1, 2\}$ est l'ensemble des racines de m_A et m_A non scindé simple.

Pour la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On trouve $P_{A_2} = (1-X)^3$.
2. P_{A_2} est scindé donc la matrice A_1 est trigonalisable.
3. $\mathrm{Sp}(A_2) = \{1\}$.
4. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} & u \in E_1(A_2) \\ \iff & A_2 u = 1 \times u \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & 2z & = & x \\ -x & & & + & z & = & y \\ x & + & y & & & = & z \end{array}\right. \\ \iff & x + y - z = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation d'un plan donc $n_1 = \dim(E_1(A_2)) = 2$ et

$$E_1(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

5. $n_1 = 2 < 3 = \alpha_1$ donc A_2 n'est pas diagonalisable.
6. On cherche $1 = \alpha_1 - n_1$ vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_2 u_3 = 1 \times u_3 + au_1 + bu_2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

   Or nous avons

$$\begin{aligned} & A_2 u_3 = 1 \times u_3 + au_1 + bu_2 \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 2z & = & x+a+b \\ -x & & & + & z & = & y-b \\ x & + & y & & & = & z+b \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 2z & = & a+b \\ x & + & y & - & z & = & b \end{array} \right. . \end{aligned}$$

   Nous devons donc avoir $a + b = 2b$ i.e. $a = b$. On peut choisir $a = b = 1$ et dans ce cas

$$A_2 u_3 = u_3 + u_1 + u_2 \iff x + y - z = 1.$$

   On considère donc le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   pour bien avoir $A_2 u_3 = 1 \times u_3 + u_1 + u_2$.
7. Nous avons alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = PTP^{-1},$$

   Nous pouvons donc en déduire son polynôme minimal

$$m_A = m_T = (X-1)^3$$

car A non diagonalisable donc $m_A \neq (X-1)$ qui est scindé simple et car $m_A \neq (X-1)^2$ parce que $(A - I_3)^2 = P(T - I_3)^2 P^{-1} \neq 0_{3,3}$.

2 Exercice 5

1. Nous avons après calculs $P_A = (4-X)^3(8-X)$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{4, 8\}$. Ainsi $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ d'où A est inversible. De plus

$$\mathrm{rg}(A - 5I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

   Donc, d'après le théorème du rang,

$$n_3 = \dim(E_4(A)) = 3 = \alpha_4.$$

   Nous avons également $n_1 = \dim(E_8(A)) = 1 = \alpha_1$ et P_A scindé. Ainsi, par théorème, A est diagonalisable.
2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton. $m_A \mid P_A$. Donc

$$m_A = (X-4)^\alpha (X-8)^\beta, \quad 0 \leq \alpha \leq 3, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

   De plus A est diagonalisable donc le polynôme minimal m_A est scindé simple

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

   Enfin nous avons également que $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de m_A. Donc $\alpha = \beta = 1$ et

$$m_A = (X-4)(X-8).$$

3. Nous avons alors

$$0_{n,n} = m_A(A) = (A - 4I_4)(X - 8I_4) = A^2 - 12A + 32I_4.$$

Autrement dit

$$I_4 = \frac{1}{32}(12A - A^2) = \frac{1}{32}(12I_4 - A)A.$$

Ainsi A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{32}(12I_4 - A) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3 Exerice 6

Nous avons

$$P_A = (1 - X)^2(c - X).$$

Si $c = 1$ alors $m_A = (1 - X)^\alpha$ avec $1 \leq \alpha \leq 3$. Si $\alpha = 1$ alors $m_A = X - 1$ et $0_{3,3} = m_A(A) = A - I_3$ i.e. $A = I_3$ ce qui n'est pas. Donc $\alpha \in \{2, 3\}$ et ainsi m_A n'est pas scindé simple d'où A n'est pas diagonalisable.

Si $c \neq 1$ alors $m_A = (X - 1)^\alpha(X - c)$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$. On suppose que la matrice A est diagonalisable. Alors m_A est scindé simple, i.e. $\alpha = 1$ et $m_A = (X - 1)(X - c)$. Ainsi

$$0_{3,3} = m_A(A) = (A - I_3)(A - cI_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - c & a & 1 \\ 0 & 1 - c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a(1 - c) & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, comme $c \neq 1$, $a = 0$ et b est un réel quelconque. Réciproquement on suppose que $a = 0$. Alors, d'après le calcul précédent $(A - I_3)(A - cI_3) = 0_{3,3}$. Donc $(X - 1)(X - c)$ annule A, d'où $m_A \mid (X - 1)(X - c)$, puis comme $\{1, c\} = \mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de m_A avec $c \neq 1$, $m_A = (X - 1)(X - c)$ est scindé simple, d'où A est diagonalisable.

En conclusion A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

4 Exercice 7

On suppose que $f^{2020} = 0$ et que f est diagonalisable. Alors $m_f \mid X^{2020}$ et m_f est scindé simple. Donc $m_f = X$, d'où $0_{\mathcal{L}(E)} = m_f(f) = f$.