L2 - Algèbre linéaire - Fiche diagonalisation et trigonalisation

M. Cacitti-Holland

2023-2025

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser ou trigonaliser.

1. On commence par calculer son polynôme caracétéristique P_A.
2. Si P_A peut s'écrire sous forme factorisée
$$P_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_r)^{\alpha_r},$$
alors A est trigonalisble. Sinon A ne l'est pas et on s'arrête là.
3. Supposons que P_A est scindé avec la factorisation précédente. On en déduit son spectre
$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}.$$
4. On détermine les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(A), ..., E_{\lambda_r}(A)$ en résolvant le système linéaire $Au = \lambda_i u$ pour tout $i \in \{1, r\}$. On les écrit alors comme le sous-espace engendré par des vecteurs
$$E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Vect}(u_1^i, ..., u_{n_i}^i),$$
et on en déduit leurs dimensions $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = n_i$ le nombre de vecteurs.
5. Si $n_1 + ... + n_r = n$ alors A est diagonalisable et
$$A = PDP^{-1},$$
avec P matrice dont les colonnes sont $u_1^1, ..., u_{n_1}^1, ..., u_1^r, ..., u_{n_r}^r$ et D matrice diagonale de coeffcients diagonaux λ_1 (n_1 fois), ..., λ_r (n_r fois).
6. Sinon $n_1 + ... + n_r < n$ alors A est seulement trigonalisable. Pour tout $i \in \{1, ...r\}$, on cherche $\alpha_i - n_i$ vecteurs $u_{n_i+1}^i, ..., u_{\alpha_i}^i \in \mathbb{K}^n$ tels que, pour tout $k \in \{n_i + 1, ..., \alpha_i\}$
$$Au_k^i = \lambda_i u_k^i + c_1 u_1^i + ... + c_{k-1} u_{k-1}^i$$
avec $c_1, ..., c_{k-1}$ donnés par l'énoncé ou simples (typiquement $c_{k-1} = 1, c_1 = ... = c_{k-2} = 0$). On trouve ces vecteurs en résolvant les système linéaires associés.
7. On en déduit alors que
$$A = PTP^{-1},$$
avec P matrice dont les colonnes sont $u_1^1, ..., u_{\alpha_1}^1, ..., u_1^r, ..., u_{\alpha_r}^r$ et T matrice diagonale par blocs triangulaires supérieuresù (donc triangulaire supérieure)
$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_r \end{pmatrix},$$
avec, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, T_i triangulaire supérieure
$$T_i = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_i I_{n_i} & & * & \\ \hline & \lambda_i & & * \\ (0) & & \ddots & \\ & (0) & & \lambda_i \end{array}\right).$$