Connexité des valeurs d'adhérence et critère de convergence

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon (pour le théorème)
2. Oraux X-ENS Analyse 1 (pour l'application)

Leçons.

1. 203 Utilisation de la compacité
2. 204 Connexité, exemples et applications
3. 223 Suites numériques, convergence, valeurs d'adhérence, exemples et applications

Théorème. Soit (E, d) espace métrique compact, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $d(u_n, u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de u est connexe compact de E.

Démonstration.
Etape 1 : Γ est compact
Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $A_n = \{u_k, k \geq n\}$.
Soit $x \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$u_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

Donc, par croissance de φ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, u_{\varphi(k)} \in A_n$$

D'où $x \in \overline{A_n}$, puis, comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.
Réciproquement soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \overline{A_n}$.
Ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in A_n, d(x, y) \leq \varepsilon \text{ ie } \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, d(x, u_k) \leq \varepsilon$$

D'où $x \in \Gamma$.
Par conséquent (il serait plus judicieux de l'écrire directement sans le justifier pour gagner du temps)

$$\Gamma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

En particulier Γ est un fermé dans E compact comme réunion dénombrable de fermés de E, d'où Γ est compact.

Etape 2 : Raisonnement par l'absurde pour la connexité

On suppose que Γ n'est pas connexe, alors il existe A et B deux fermés non vides disjoints de Γ tels que

$$\Gamma = A \cup B$$

Comme Γ est compact, A et B sont des compacts disjoints, donc $\alpha := d(A, B) > 0$.
On considère ensuite

$$A' = \left\{x \in E, d(x, A) < \frac{\alpha}{3}\right\} = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\alpha}{3}\right) \supset A$$

Et

$$B' = \left\{x \in E, d(x, B) < \frac{\alpha}{3}\right\} = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\alpha}{3}\right) \supset B$$

Ainsi A' et B' sont des ouverts disjoints de E comme réunion dénombrable d'ouverts de E, d'où $K = E \backslash (A' \cup B')$ est un fermé dans le compact E, donc K est compact.
Montrons que u admet une valeur d'adhérence dans K ce qui aboutira à une contradiction car

$$\Gamma \cap K = (A \cup B) \cap E \backslash (A' \cup B') \subset (A' \cup B') \cap E \backslash (A' \cup B') = \varnothing$$

Etape 3 : Construction d'une valeur d'adhérence de u dans K

Comme $d(u_n, u_{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(u_n, u_{n+1}) < \frac{\alpha}{3}$$

Soit $n \geq N$ et $x_0 \in A \subset \Gamma$, donc il existe $n_1 > n$ tel que $d(x_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$, d'où $u_{n_1} \in A'$.
De même pour $y_0 \in B \subset \Gamma$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$, d'où $u_{n_2} \in B'$ et $u_{n_2} \notin A'$.
Ainsi on peut considérer

$$n_0 := inf(n > n_1, u_n \notin A') \in \mathbb{N}$$

Donc $u_{n_0} \notin A'$ et $u_{n_0 - 1} \in A'$.
Or

$$\forall (a, b) \in A \times B, d(a, b) \leq d(a, u_{n_0-1}) + d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) + d(u_{n_0}, b)$$

D'où, par passage à la borne inférieure,

$$\alpha = d(A, B) \leq d(A, u_{n_0-1}) + d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) + d(u_{n_0}, B) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + d(u_{n_0}, B)$$

Ainsi

$$d(u_{n_0}, B) \geq d(A, B) - d(A, u_{n_0-1}) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) > \frac{\alpha}{3}$$

D'où $u_{n_0} \notin B'$.
Par conséquent

$$u_{n_0} \in E \backslash (A' \cup B') = K$$

On peut donc construire par ce procédé une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.
Etape 4 : Contradiction
Comme K est compacte, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans K, d'où u également ce qui contredit $\Gamma \cap K = \varnothing$.
Par conséquent Γ est connexe. $\square$

Application. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors u converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.
Etape 1 : Sens direct
On suppose que u converge vers $l \in [0,1]$, alors $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - l = 0$.
Etape 2 : Sens indirect
On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors d'après le théorème précédent, l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de u est un connexe compact de $[0,1]$ compact, ie un intervalle fermé de $[0,1]$.
Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il suffit de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Lemme. Les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des points fixes de f.

Démonstration. Soit $a \in \Gamma$, alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

Alors par continuité de f

$$u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

De plus on a

$$u_{\varphi(n)+1} = u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + a = a$$

D'où par unicité de la limite $f(a) = a$ ie a est un point fixe de f. $\square$

On suppose par l'absurde que u admette deux valeurs d'adhérence distinctes $l < l'$, alors par connexité de Γ, $[l, l'] \subset \Gamma$.
En particulier $\frac{l+l'}{2} \in \Gamma$, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{l+l'}{2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Longrightarrow \left| u_{\varphi(n)} - \frac{l+l'}{2} \right| \leq \varepsilon$$

En particulier pour $N = \varphi(N_0) \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = \frac{l'-l}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\left| u_N - \frac{l+l'}{2} \right| \leq \frac{l'-l}{2}$, d'où $u_N \in [l, l'] \subset \Gamma$.
Ainsi, d'après le lemme intermédiaire, $f(u_N) = u_N$.
Puis, par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par une récurrence immédiate, $\forall n \geq N, u_n = u_N$.
Par conséquent u est stationnaire à partir du rang N ce qui contredit l'existence de deux valeurs d'adhérence distinctes. $\square$