Calcul d'une intégrale par théorème des résidus

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse complexe de Patrice Tauvel

Leçons.

1. 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables
2. 245 Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications

Théorème. Soit $\alpha \in]-1,1[$, alors $I := \int_0^\infty \frac{t^\alpha ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{4cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2}$.

Démonstration.

Etape 1 : L'intégrale est convergente

— La fonction $f : t \longmapsto \frac{t^\alpha ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

— $ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$, donc

$$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} = \frac{1}{t+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

D'où f est prolongeable continûment en 1.

— Comme $\alpha \in]-1,1[$, il existe $\varepsilon \in]-1,\alpha[$, donc

$$f(t) = \frac{t^\alpha ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t^\alpha ln(t) = -t^\varepsilon(t^{\overbrace{\alpha-\varepsilon}^{>0}} ln(t)) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^\varepsilon\right) = o\left(\frac{1}{t^{-\varepsilon}}\right)$$

avec $t \longmapsto \frac{1}{t^{-\varepsilon}}$ intégrable en 0 car $-\varepsilon < 1$, d'où f intégrable au voisinage de 0.

— Comme $1-\alpha \in]0,2[$, il existe $\delta \in]0,1-\alpha[$, donc

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\alpha-2} ln(t) = t^{\alpha-2+\delta}(t^{-\delta} ln(t)) = \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{\alpha-2+\delta}) = o\left(\frac{1}{t^{-\alpha+2-\delta}}\right)$$

avec $t \longmapsto \frac{1}{t^{-\alpha+2-\delta}}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ car $-\alpha+2-\delta > 1$.

Ainsi la fonction continue f est intégrable sur $]0,+\infty$, d'où I est une intégrale convergente.

Etape 2 : Se ramener au théorème des résidus

On considère Log une détermination du logarithme complexe sur $U = \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$, $z^\alpha = exp(\alpha Log(z))$ et

$$f(z) = \frac{z^\alpha Log(z)}{z^2-1}$$

Alors f est une fonction méromorphe sur U dont les singularités sont $0, -1, 1$ avec des pôles simples en 1 et -1.
On considère le chemin contin fermé γ parcourant le demi-cercle de rayon R et de centre 0 et coutournant $-1, 0, 1$ par des demi-cercles de rayon r (faire un dessin).
Donc f est holomorphe sur un ouvert contenant l'image de ce chemin, d'où, d'après le théorème des résidus

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Etape 3 : Calcul des différentes intégrales apparaissant avec $\gamma_{0,R}, \gamma_{a,r}$ pour $a \in \{0, 1, -1\}$
Premièrement

$$\left|\int_{\gamma_{0,r}} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt\right| = \left|\int_0^\pi \frac{r^\alpha e^{it\alpha}Log(re^{it})}{r^2e^{2it}-1}ire^{it}dt\right| \leq \int_0^\pi \frac{r^{\alpha+1}|Log(re^{it})|}{|r^2e^{2it}-1|}dt$$

Or par inégalité triangulaire gauche on a

$$\forall t \in [0,\pi], |r^2e^{2it}-1| \geq ||r^2e^{2it}| - |1|| = |r^2-1|$$

et

$$\forall t \in [0,\pi], |Log(re^{it})| = |ln(|re^{it}|) + iArg(re^{it})| = |ln(r) + it| \leq |ln(r)| + t \leq |ln(r)| + \pi$$

D'où, comme $\alpha > -1$,

$$\left|\int_{\gamma_{0,r}} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{r^{\alpha+1}(|ln(r)|+\pi)}{|r^2-1|}dt = \pi\frac{r^{\alpha+1}(|ln(r)|+\pi)}{|r^2-1|} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

De même, comme $\alpha < 1$

$$\left|\int_{\gamma_{0,R}} f(z)dz\right| \leq \pi\frac{R^{\alpha+1}(|ln(R)|+\pi)}{|R^2-1|} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puis, comme 1 et -1 sont des pôles simples de f,

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^\alpha Log(z)}{z+1} = 0$$

Et

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z^\alpha Log(z)}{z-1} = \frac{(-1)^\alpha Log(-1)}{-2} = \frac{(-1)^\alpha i\pi}{-2} = -\frac{e^{i\pi\alpha}i\pi}{2}$$

Lemme. Soit $\alpha, \beta \in [0, 2\pi], a \in U, R \in \mathbb{R}_+^*, r \in]0, R[,\ \gamma_r : t \in [\alpha, \beta] \longmapsto a + re^{it}$ et $f \in H(D(a,R)\backslash\{a\})$ tel que a soit un pôle simple ou un singularité effaçable de f, alors

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} i(\beta-\alpha)Res(f,a)$$

Démonstration.
On considère la partie principale de f :

$$g : \begin{array}{rcl} D(a,R)\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) - \frac{Res(f,a)}{z-a} \end{array}$$

Alors, par hypothèse, g est holomorphe sur $D(a,R)$.
Donc

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} g(z)dz + Res(f,a)\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a}$$

avec, par principe du maximum,

$$\left|\int_{\gamma_r} g(z)dz\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} g(a+re^{it})re^{it}dt\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(a+re^{it})|rdt \leq M(\beta-\alpha)r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{rie^{it}dt}{a+re^{it}-a} = i(\beta-\alpha)$$

Donc

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} i(\beta-\alpha)Res(f,a)$$

□

Par conséquent

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} i\pi Res(f,1) = 0 \text{ et } \int_{\gamma_{-1,r}} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} i\pi Res(f,-1) = \frac{e^{i\pi\alpha}\pi^2}{2}$$

Etape 3 : Passer à la limite
Ainsi, en faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue par le théorème des résidus et en faisant attention dans quels sens sont parcourus les chemins, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}Log(x)}{x^2-1}dx - \frac{e^{i\pi\alpha}\pi^2}{2} = 0$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $Log(x) = ln(-x) + i\pi$ et $x^{\alpha} = e^{\alpha ln(-x)+\alpha i\pi} = (-x)^{\alpha}e^{i\pi\alpha}$, donc

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^{\alpha}Log(x)}{x^2-1}dx = e^{i\pi\alpha}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{\alpha}ln(-x)}{x^2-1}dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{\alpha}i\pi}{x^2-1}dx\right) = e^{i\pi\alpha}\left(I + i\pi\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2-1}dx\right)$$

Ainsi

$$(1+e^{i\pi\alpha})I + e^{i\pi\alpha}\left(i\pi\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2-1}dx - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0 \text{ ie } \left(e^{-i\pi\alpha}+1\right)I + i\pi\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{2}$$

D'où, en prenant la partie réelle on obtient

$$I = \frac{\pi^2}{2Re(e^{-i\pi\alpha}+1)} = \frac{\pi^2}{2Re\left(e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} + e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\right)\right)} = \frac{\pi^2}{4Re\left(e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)} = \frac{\pi^2}{4cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^2}$$

□