Table de caractères de S_4

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. (cours)

Leçons.

1. 101 Groupe opérant sur un ensemble, exemples et applications
2. 104 Groupes abéliens et non abéliens finis, exemples et applications
3. 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini, applications
4. 107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, exemples
5. 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien
6. 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Théorême. Soit $Isom(T)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent stable T le tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien, alors on a l'isomorphisme de groupes et les injections suivantes

$$S_4 \simeq Isom(T) \subset O_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{C})$$

Ainsi on définit une représentation irréductible de dimension 3 de S_4 dont les caractères sont

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_T	3	1	0	-1	-1

Démonstration.

Etape 1 : $S_4 \simeq Isom(T)$

On considère le morphisme

$$u : \begin{array}{ccc} Isom(T) & \longrightarrow & S_{\{A,B,C,D\}} \simeq S_4 \\ g & \longmapsto & g_{|\{A,B,C,D\}} \end{array}$$

en notant les sommets de T : A, B, C, D.

Ainsi u est injectif car, pour $g \in Isom(T)$, si

$$g(A) = A, g(B) = B, g(C) = C, g(D) = D$$

Alors g est une isométrie fixant la base affine (A, B, C, D), donc $g = id_{\mathbb{R}^3}$.

De plus u est surjective car pour tout $(I, J) \in S_{\{A,B,C,D\}}$, (I, J) est l'image par u de la symétrie par rapport au plan KLM, avec M le milieu de $[I, J]$ et $(K, L) \in \{A, B, C, D\} \backslash \{I, J\}$ distincts, et car les transpositions engendrent $S_{\{A,B,C,D\}}$.

Etape 2 : Déterminer les caractères de la représentation $\rho : S_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C}) = i \circ u^{-1}$

— Soit $(12) \in S_4$, alors, d'après ce qui précède, $\rho(12)$ est la symétrie par rapport au plan CDM, donc dans la base $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}\right)$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\chi(12) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

— Soit $(123) \in S_4$, alors $\rho(123)$ est la rotation d'axe DN, avec N milieu du triangle équilatéral ABC, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, d'où dans une base adpatée de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\chi(123) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = 1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

— Soit $(12)(34)$, alors $\rho((12)(34))$ est la rotation d'axe IJ, avec I milieu de $[A, B]$ et J milieu de $[C, D]$, et d'angle π, d'où dans une base adaptée de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\chi((12)(34)) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\pi) & -sin\,(\pi) \\ 0 & sin\,(\pi) & cos\,(\pi) \end{pmatrix} = 1 + 2cos\,(\pi) = -1$$

— Soit $\sigma = (1234) \in S_4$.
Or, dans une base adaptée de $\mathbb{R}^3$,

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
Or $det \circ \rho$ est un morphisme de groupes non trivial de S_4 dans $\{-1, 1\}$, donc

$$det \circ \rho = \varepsilon$$

Ainsi $\lambda = det(\rho(\sigma)) = \varepsilon(\sigma) = -1$.
De plus σ est d'ordre 4, donc $\rho(\sigma)$ également, ainsi $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Par conséquent

$$\chi(1234) = tr(\rho(\sigma)) = \lambda + 2cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Etape 3 : Irréductibilité de χ
Comme

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \tfrac{1}{|S_4|}(|cl(id_{[\![1,4]\!]})|\chi(id_{[\![1,4]\!]})\overline{\chi(id_{[\![1,4]\!]})} + |cl(12)|\chi(12)\overline{\chi(12)} \\ &\quad +|cl(123)|\chi(123)\overline{\chi(123)} + |cl((12)(34))|\chi((12)(34))\overline{\chi((12)(34)} \\ &\quad +|cl(1234)|\chi(1234)\overline{\chi(1234)}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que χ est irréductible. $\square$

Théorême. Soit $Isom^+(C)$ le groupe des isométries positives de $\mathbb{R}^3$ qui laissent stable C le cube de l'espace affine euclidien, alors on a l'isomorphisme de groupes et les injections suivantes

$$S_4 \simeq Isom^+(C) \subset SO_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{C})$$

Ainsi on définit une représentation irréductible de dimension 3 de S_4 dont les caractères sont

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_C	3	-1	0	1	-1

Démonstration.
Etape 1 : $S_4 \simeq Isom^+(C)$
On considère le morphisme

$$u : \begin{array}{ccc} Isom^+(C) & \longrightarrow & S_{\mathcal{D}} \simeq S_4 \\ g & \longmapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array}$$

Avec $\mathcal{D}$ l'ensemble des grandes diagonales AA', BB', CC', DD' du cube $ABCDA'B'C'D'$.
Ainsi u est injectif car si

$$r \in ker(u) \backslash \{id_{\mathbb{R}^3}\} \subset SO_3(\mathbb{R})$$

Alors r est une rotation d'axe Δ.
Puis, pour $\delta \in \mathcal{D}$, on a

$$r(\delta) = u(r)(\delta) = \delta$$

Ainsi δ est inclus dans un sous-espace propre de r qui sont Δ et $\Delta^\perp$, d'où $\delta = \Delta$ ou $\Delta \subset \delta^\perp$. Par conséquent Δ est égal à au plus un des $\delta \in \mathcal{D}$ et ainsi pour les trois $\delta' \in \mathcal{D}\backslash\{\delta\}$ restants, $\Delta \subset \delta'^\perp$ ce qui est impossible.
De plus u est surjectif car pour tout $([I, I'], [J, J']) \in S_{\mathcal{D}}$, $([I, I'], [J, J'])$ est l'image par u de la rotation d'axe (M, M') et d'angle π, avec M milieu de $[I, J']$ (respectivement $[I, J]$) et M' milieu de $[I', J]$ (respectivement $[I', J']$) (selon le posititionnement des grandes diagonales $[I, I']$ et $[J, J']$), et car les transpositions engendrent $S_{\mathcal{D}}$.
Etape 2 : Déterminer les caractères de la représentation $\rho : S_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C}) = i \circ u^{-1}$

— Soit $(12) \in S_4$, alors d'après ce qui précède

$$\chi(12) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

— Soit $(123) \in S_4$, alors $\rho(123)$ est une rotation d'ordre 3 donc d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$, d'où

$$\chi(123) = 1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

— Soit $(1234) \in S_4$, alors $\rho(1234)$ est une rotation d'ordre 4 donc d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\chi(1234) = 1 + 2cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

— Soit $(12)(34) \in S_4$, alors $\rho((12)(34))$ est rotation d'ordre 2 donc d'angle $\pm\pi$, d'où

$$\chi((12)(34)) = 1 + 2cos(\pi) = -1$$

Etape 3 : Irréductibilité de χ

Comme

$$\begin{array}{rcl} \langle \chi, \chi \rangle & = & \frac{1}{|S_4|}(|cl(id_{[\![1,4]\!]})|\chi(id_{[\![1,4]\!]})\overline{\chi(id_{[\![1,4]\!]})} + |cl(12)|\chi(12)\overline{\chi(12)} \\ & & +|cl(123)|\chi(123)\overline{\chi(123)} + |cl((12)(34)))|\chi((12)(34))\overline{\chi((12)(34)} \\ & & +|cl(1234)|\chi(1234)\overline{\chi(1234)}) \\ & = & 1 \end{array}$$

On en déduit que χ est irréductible. □

Corollaire. (S'il reste du temps) On en déduit la table de caractères de S_4

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_C	3	1	0	-1	-1
χ_T	3	-1	0	1	-1
χ	2	0	-1	0	2

Démonstration.

Etape 1 : Caractère de la signature

On considère le morphisme

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & \{-1, 1\} \subset GL_1(\mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}$$

Alors il s'agit d'une représentation de dimension 1 de S_n donc irréductible et on en déduit la ligne correspondante.

Etape 2 : Dernier caractère irréductible

Notons tout d'abord qu'il s'agit bien du dernier caractère irréductible à déterminer car il y en a autant que de classes de conjugaison.

On a également la relation sur les dimensions

$$24 = |S_4| = \sum_{\chi \in Irr(S_4)} dim(V_\chi)^2 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + dim(V_\chi)^2 = 20 + dim(V_\chi)^2$$

D'où $\chi(id_{[\![1,4]\!]}) = dim(V_\chi) = 2$.

Puis par orthogonalité sur les colonnes pour le produit scalaire usuel, on a

$$0 = \langle C_{id}, C_{(12)} \rangle = 1 - 1 + 3 - 3 + 2\chi(12)$$

$$0 = \langle C_{id}, C_{(123)} \rangle = 1 + 1 + 0 + 0 + 2\chi(123)$$

$$0 = \langle C_{id}, C_{(1234)} \rangle = 1 - 1 - 3 + 3 + 2\chi(1234)$$

$$0 = \langle C_{id}, C_{(12)(34)} \rangle = 1 + 1 - 3 - 3 + 2\chi((12)(34))$$

D'où

$$\chi(12) = 0, \chi(123) = -1, \chi(1234) = 0, \chi((12)(34)) = 2$$

□