Prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Queffélec et Zuily
2. Objectif agrégation

Leçons.

1. 207 Prolongements de fonctions, exemples et applications
2. 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales
3. 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, exemples et applications
4. 245 Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications
5. 265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Théorème. La fonction Γ se prolonge, de manière unique, en une fonction holomorphe sur

$$\Omega = \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$$

Démonstration. On considère

$$\overline{\Gamma} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{(z-1)ln(x)} dx \end{array}$$

Montrons que $\overline{\Gamma}$ ainsi définie est un prolongment holomorphe de Γ :

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\overline{\Gamma}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{(t-1)ln(x)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \Gamma(t)$$

— Appliquons le théorème d'holomorphie à la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega \times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, x) & \longmapsto & e^{-x} e^{(z-1)ln(x)} \end{array}$$

— Pour tout $z \in \Omega$, $f(z, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par croissance comparée.

— Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(\cdot, x)$ holomorphe sur Ω car la fonction exponentielle l'est.

— Soit K un compact de Ω, alors il existe $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall z \in K, \varepsilon \leq Re(z) \leq M$$

Donc

$$\forall z \in K, \forall x \in \,]0, +\infty[, |f(z,x)| = e^{-x} e^{(Re(z)-1)ln(x)} \leq \begin{cases} 1 \times e^{(\varepsilon-1)ln(x)} & si \quad x \leq 1 \\ e^{-x} e^{(M-1)ln(x)} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

On considère donc

$$g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{\varepsilon-1} & si \quad x \leq 1 \\ e^{-x} x^{M-1} & si \quad x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Ainsi

$$\forall z \in K, |f(z, \cdot)| \leq g$$

Et g est intégrable sur $]0, +\infty[$ car intégrable sur $]0, 1]$ et sur $]1, +\infty[$.

Ainsi, par théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, $\overline{\Gamma} = \int_0^{+\infty} f(\cdot, x) dx$ est holomorphe sur Ω.

Par conséquent $\overline{\Gamma}$ est un prolongement holomorphe de Γ sur Ω, et est unique par principe des zéros isolés. $\square$

Théorème. La fonction Γ se prolonge en une unique fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les singularités sont des pôles simples en les $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors par intégration par parties

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \left[-x^t e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t x^{t-1}(-e^{-x}) dx = 0 - 0 + t\Gamma(t)$$

Ainsi $z \longmapsto \Gamma(z+1)$ et $z \longmapsto z\Gamma(z)$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant un point d'accumulation, d'où, par principe des zéros isolés,

$$\forall z \in \Omega, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

D'où, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(z+n) = (z+n-1)...z\Gamma(z)$$

On considère donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > -n\} \backslash [\![-(n-1), 0]\!]$$

Et

$$\Gamma_n : \begin{array}{ccc} \Omega_n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)...z} \end{array}$$

Alors, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Γ et Γ_n coïncident sur $\Omega \subset \Omega_n$, d'où Γ_n est un prolongement holomorphe de Γ sur Ω_n.

En particulier, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, Γ_m et Γ_n coïncident sur $\Omega_m\cap\Omega_n$.
De plus
$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_- = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$$
On peut donc consiérer
$$\overline{\Gamma}:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_- & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z\in\Omega_n & \longmapsto & \Gamma_n(z), z\in\Omega_n\end{array}$$
Ainsi $\overline{\Gamma}$ est un prolongement de Γ à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.
De plus $\overline{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ car pour $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que sur un voinage de z dans Ω_n, $\overline{\Gamma}$ coïncide avec Γ_n holomorphe.
Donc $\overline{\Gamma}$ est l'unique prolongement holomorphe de Γ à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.
De plus
$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\Omega_{n+1},(n+z)\overline{\Gamma}(z)=(n+z)\Gamma_{n+1}(z)=\frac{\Gamma(z+1+n)}{(z+n-1)...z}$$
D'où, en faisant tendre z vers $-n$, on obtient
$$\forall n\in\mathbb{N},(z+n)\overline{\Gamma}(z+n)\underset{\substack{z\to-n\\ z\in\Omega_{n+1}}}{\longrightarrow}\frac{\Gamma(1)}{(-1)...(-n)}=\frac{1}{(-1)^n n!}$$
D'où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-n$ est un pôle d'ordre 1 de $\overline{\Gamma}$.
Ainsi $\overline{\Gamma}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ car $\mathbb{Z}$ est discret et fermé. □

Corollaire. (S'il reste du temps) Soit $z\in\Omega$ alors
$$\Gamma(z)=\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}\right)$$
Démonstration. Par théorème de convergence dominée on a
$$\Gamma(z)=\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt\right)$$
On considère donc pour $n\in\mathbb{N}^*$
$$I_n=\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$
Alors pour n assez grand et par intégrations par parties successives
$$I_n=\frac{n}{nz}\int_0^n t^z\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt=\frac{n(n-1)}{n^2z(z+1)}\int_0^n t^{z+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}dt$$
D'où, en itérant ce procédant,
$$I_n=\frac{n(n-1)...2\times1}{n^nz(z+1)...(z+n-1)}\int_0^n t^{z+n-1}dt=\frac{n!}{n^nz(z+1)...(z+n-1)}\frac{n^{z+n}}{z+n}=\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}$$
□