Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Cours d'algèbre de Daniel Perrin

Leçons.

1. 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$, applications
2. 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe, applications

Lemme. Soit E espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $x, y \in (E \backslash \{0\})^2$, alors il existe une transvection u ou un produit de transvections uv tel que $u(x) = y$ ou $(uv)(x) = y$.

Démonstration.
Etape 1 : Cas où x et y ne sont pas colinéaires
On cherche une transvection u de la forme $u = id_E + fa$ avec $f \in E^*$ et $a \in ker(f)$ telle que

$$y = u(x) = x + f(x)a$$

On peut donc penser $a = y - x$ et $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$.
On choisit donc $f \in E^*$ de noyau H hyperplan ne contenant pas x et devant contenir a par définition d'une transvection (un tel hyperplan existe car sinon a et x sont sur une même droite vectorielle ie $x = \lambda a = \lambda y - \lambda x$, ie $(\lambda + 1)x = \lambda y$ ce qui est absurde car x et y sont non colinéaires).
Puis, quitte à considérer $\frac{f}{f(x)}$, on peut supposer $f(x) = 1$.
On a donc

$$u(x) = x + f(x)a = x + a = y$$

Etape 2 : Cas où x et y sont colinéaires
Dans ce cas, comme $dim(E) \geq 2$, il existe $z \in E \backslash \{0\}$ non colinéaire à x et y, d'où, d'après ce qui précède il existe des transvections u et v tels que $u(x) = z, v(z) = y$, d'où

$$(uv)(x) = u(v(x)) = u(z) = y$$

□

Théorême. Les transvections engendrent $SL(E)$.

Démonstration.
On raisonne par récurrence sur $n = dim(E) \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $n = 1$, soit $u \in SL(\mathbb{R})$, alors $u = id_\mathbb{R}$ est un produit vide de transvections.
- On suppose le résultat vrai pour les espaces de dimension $n-1$ avec $n \geq 2$.
  Soit $u \in SL(E)$ et $x \in E \backslash \{0\}$.
  Or, d'après le lemme précédent appliqué à x et $u(x)$, il existe une transvection v ou un produit de transvections vw tel que $v(u(x)) = x$ ou $vw(u(x)) = x$.
  Ainsi, quitte à considérer $u' = v \circ u$ ou $u'' = v \circ w \circ u$ puis à écrire $u = v^{-1} \circ u'$ ou $u = (v \circ w)^{-1} \circ u''$, on peut supposer que

  $$u(x) = x$$

  On considère $D = Vect(x)$, $\pi : E \longrightarrow E/D$ la surjection canonique et $\overline{u} : E/D \longrightarrow E/D$ l'endomorphisme induit, ie l'unique morphisme tel que le diagramme suivant soit commutatif

  $$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ E/D & \xrightarrow[\overline{u}]{} & E/D \end{array}$$

  Comme $x \neq 0$, on peut compléter la famille (x) en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E avec $e_1 = x$.
  Ainsi $(\pi(e_2), ..., \pi(e_n))$ est une base de E/D car il s'agit d'une famille génératrice de $n-1 = dim(E/D)$ vecteurs de E : pour tout $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda e_i \in E$ on a

  $$\pi(y) = 0 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \pi(e_i)$$

  Ainsi, en utilisant ces bases,

  $$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & (*) \\ (0) & Mat_{(\pi(e_2),...,\pi(e_n))}(\overline{u}) \end{pmatrix}$$

  car, si on note $Mat_e(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,

  $$\forall i \in [\![2, n]\!], \overline{u}(\pi(e_i)) = \pi(u(e_i)) = \pi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \pi(e_j) = 0 + \sum_{j=2}^{n} a_{i,j} \pi(e_j)$$

  Et $u(e_1) = u(x) = x = e_1$.
  Donc $det(\overline{u}) = 1$, ie $\overline{u} \in SL(E/D)$ avec $dim(E/D) = n-1$
  D'où, par hypothèse de récurrence

  $$\overline{u} = \overline{\tau}_1 \circ ... \circ \overline{\tau}_r$$

  avec, pour $i \in [\![1, r]\!]$, $\overline{\tau}_i = \tau(\overline{f}_i, \overline{a}_i)$ transvection de E/D.
  Par surjectivité de π, il existe $a_i \in E$ tel que $\overline{a}_i = \pi(a_i)$, puis on pose $f_i = \overline{f}_i \circ \pi$ et

$\tau_i = \tau(f_i, a_i)$.
Ainsi $\overline{\tau}_i$ est l'endomorphisme induit par τ_i sur E/D car

$$\overline{\tau}_i \circ \pi = \left(id_{E/D} + \overline{f}_i(\cdot).\overline{a}_i\right) \circ \pi = \pi + (\overline{f}_i \circ \pi).\overline{a}_i = \pi + f_i(\cdot).\pi(a_i) = \pi \circ (id_E + f(\cdot).a_i) = \pi \circ \tau_i$$

De plus, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $f_i(x) = \overline{f}_i \circ \pi(x) = 0$ donc $\tau_i(x) = x$.
On considère

$$v = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$$

Ainsi

$$v(x) = (\tau_1 \circ ... \circ \tau_r)(x) = x = u(x)$$

Et on a également

$$\overline{v} = \overline{\tau_1 \circ ... \circ \tau_r} = \overline{\tau}_1 \circ ... \circ \overline{\tau}_r = \overline{u}$$

Par conséquent $(v^{-1} \circ u)_{|D} = id_D$ et $\overline{v^{-1} \circ u} = id_{E/D}$, donc par caractérisation des transvections $v^{-1} \circ u$ est une transvection de droite D, puis comme v est un produit de transvections, on en déduit que u est un produit de transvections.

□

Corollaire. Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

Démonstration.
Soit $u \in GL(E)$, on considère $\lambda = det(u) \in K^*$ et $v \in GL(E)$ une dilatation de rapport λ^{-1}.
Alors $uv \in SL(E)$, donc d'après ce qui précède $uv = \tau_1 \circ ... \tau_r$ avec $\tau_1, ..., \tau_r$ des transvections.
D'où

$$u = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r \circ v^{-1}$$

est produit de transvections et d'une dilatation. □