Réduction de Jordan

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi

Leçons.

1. 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie, réduction d'un endomorphisme en dimension finie, applications
2. 154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, applications
3. 157 Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents
4. 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie, exemples et applications

Lemme. Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ soit une famille libre et $F := Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ soit stable par u.

Démonstration.
Comme $u^{q-1} \neq 0$, il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$.
Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}) \in K^q$ tel que

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

Alors

$$0 = u^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{k+q-1}(x) = \sum_{k=q-1}^{2q-2} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 u^{q-1}(x) + 0 + ... + 0$$

D'où $\lambda_0 = 0$, puis par itérations successives, $\lambda_0 = ... = \lambda_{q-1} = 0$ ce qui montre que $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre.

Soit $y \in F$, alors il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}) \in K^q$ tel que

$$y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$$

Donc

$$u(y) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{k-1} u^k(x) = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{k-1} u^k(x) + 0 \in F$$

D'où F est u-stable. □

Proposition. Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tel que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $G = {}^{\perp}H = {}^{\perp}Vect(\varphi, ({}^t u)(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soient u-stables et

$$E = F \oplus G$$

Démonstration.
Comme u est nilpotent d'indice q, ${}^t u$ est nilpotent d'indice q, donc d'après le lemme il existe $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ tel que

$$u^{q-1}(x) \neq 0, ({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$$

avec $(x, u(x), ...u^{q-1}(x))$ et $(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ libres, $F := Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ u-stable et $H := Vect(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ ${}^t u$-stable.
Ainsi, en notant $G := {}^{\perp}H$, on a :

— Egalité des dimensions :

$$dim(G) = dim(E) - dim(H) = dim(E) - q = dim(E) - dim(F)$$

— $G = {}^{\perp}H$ u-stable :

$$\forall y \in G, \forall \varphi \in H, \varphi(u(y)) = \underbrace{{}^t u(\varphi)}_{\in H}(\underbrace{y}_{\in {}^{\perp}H}) = 0$$

— $F \cap G = \{0\}$: Soit $y \in F \cap G$, alors il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}) \in K^q$ tel que

$$y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \in G$$

Donc, par u-stabilité de G, $u^{q-1}(y) \in G$, d'où

$$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+q-1}(x) = \lambda_0 \underbrace{u^{q-1}(x)}_{\neq 0} + 0 + ... + 0$$

Ainsi $\lambda_0 = 0$, puis, par itérations successives, $\lambda_0 = ... = \lambda_{q-1} = 0$ ie $y = 0$.

Par conséquent $E = F \oplus G$ avec F et G u-stables. □

Théorème. Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice q alors il existe une base $b = b_1 \cup ... \cup b_r$ telle que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$:

— $E_i = Vect(b_i)$ soit u-stable

— $J_i = Mat_{b_i}\left(u_{|E_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{dim(E_i)}(K)$

Ainsi

$$Mat_b(u) = diag(J_1, ..., J_r)$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $n = 1$: Tout endormorphisme est une homothétie donc tout endomorphisme nilpotent est nul.
- On suppose le résultat vrai pour les espaces vectoriels de dimensions strictement inférieures à n.
  Comme u est nilpotent, avec les notations de la proposition précédente, $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont nilpotents.
  De plus si on considère $b_1 = (x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ alors
  $$Mat_{b_1}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  Puis si $q = n$ alors le résultat est vérifié, et si $q < n$ alors $dim(G) < n$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{|G}$: il existe une base b_G telle que $Mat_{b_G}(u_{|G})$ soit de la forme souhaitée.
  Ainsi par u-stabilité de F et G et $E = F \oplus G$, $Mat_{b_1 \cup b_r}(u)$ est de la forme souhaitée.

□

Théorème. (S'il reste du temps) Soit $u \in End(E)$ tel que $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ soit scindé sur K, alors il existe une base b de E tel que

$$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_p \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Avec

$$\forall k \in [\![1, p]\!], J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k - 1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{dim(E_i)}(K)$$

Et

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \forall i \in [\![k+1, \alpha_k]\!], \varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$$

Démonstration. D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$E = ker(0) = ker(\chi_u(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} ker\left((\lambda_k id_E - u)^{\alpha_k}\right) =: \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$$

Comme u est diagonalisable, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $dim(N_k) = \alpha_k$.
De plus N_k est u-stable et $\lambda_k id_{N_k} - u_{|N_k}$ est nilpotent d'indice β_k.
Par conséquent, dans une base adaptée, on a bien la forme souhaitée. □

Lemme. (S'il reste du temps) Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice q, alors ${}^t u \in End(E^*)$ est nilpotent d'indice q.

Démonstration. On montre par récurrence sur $k \in N$ que

$$\forall \varphi \in E^*, ({}^t u)^k(\varphi) = {}^t(u^k)(\varphi)$$

— Pour $k = 0$ on a bien $\forall \varphi \in E^*, id_{E^*}(\varphi) = \varphi = \varphi \circ id_E = {}^t id_E(\varphi)$.
— On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$, alors, pour $\varphi \in E^*$,

$$({}^t u)^{k+1}(\varphi) = ({}^t u)^k({}^t u(\varphi)) = ({}^t u)^k(\varphi \circ u) = {}^t(u^k)(\varphi \circ u) = \varphi \circ u \circ u^k = \varphi \circ u^{k+1} = {}^t(u^{k+1})$$

Le théorème de récurrence permet donc de conclure.
Par conséquent

$$({}^t u)^q = {}^t(u^q) = 0$$

De plus

$$\forall k \in [\![0, q-1]\!], ({}^t u)^k = {}^t(u^k) \neq 0$$

Car s'il existe $k \in [\![0, q-1]\!]$ tel que ${}^t(u^k) = 0$ alors

$$\forall \varphi \in E^*, \varphi \circ u^k = 0$$

En particulier si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u^k(e_i) = e_i^* \circ u^k = 0$$

D'où $u^k = 0$ ce qui est absurde.
Par conséquent ${}^t u$ est nilpotent d'indice q. $\square$