Question de cours. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes. Que peut-on dire des applications continues et des applications lipschiziennes sur cet espace ? Le démontrer.

Exercice. Soit $E = c_0$ l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 en $+\infty$, muni de la norme uniforme $\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}|u_n|$. On considère la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array}$$

Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\| = \underset{u\in E\backslash\{0\}}{sup} \frac{\|\varphi(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$.

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Exercice. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivables sur $[0, 1]$. On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
3. On considère $f_n(t) = t^n(1-t)$. Calculer $\|f_n\|$ et en déduire que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Montrer que f est lipschizienne pour tout norme sur E.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

1. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que le résultat précédent est faux dans $\mathbb{Q}^N$.

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
On dit que $u \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

On suppose que F est complet (toute de suite de Cauchy dans F est convergeante).
Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall T \in \mathcal{L}(E, F), \|T\| = \underset{x\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $\|P\|_\infty := \underset{k\in\mathbb{N}}{max} |a_k|$ et $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k+1}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas comparables (ie qu'il n'existe pas de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $C_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq C_2 \|\cdot\|$).

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enconcer et démontrer le théorème de Heine.

Exercice. On considère $E = C_b(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$$

Montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer $\|T\| = \underset{f \in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

Exercice. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère $u : f \in E \longmapsto f(0) \in \mathbb{R}$ et

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f - u(f) id_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Montrer que ψ est :

1. Linéaire.
2. Bijective.
3. Non continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice. Soit $E = C([a,b], \mathbb{K})$ muni des normes $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$) définies par

$$\forall f \in E, \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Montrer que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

En déduire $\underset{p \to +\infty}{lim} \|f\|_p$ pour $f \in E$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche