Question de cours. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes. Que peut-on dire des suites convergentes, des applications continues et des applications lipschiziennes sur cet espace ? Le démontrer.

Réponse. La convergence et la limite d'une suite ne dépendent de la norme considérée. De même pour le caractère continue ou lipschizien d'une application.

Démonstration. Soit N_1 et N_2 les deux normes équivalentes sur E : il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$c_1 N_1 \leq N_2 \leq c_2 N_1$$

On en déduit que la continuité pour une norme implique la continuité pour l'autre norme (utiliser la continuité séquentielle par exemple) et idem pour la lipschitziennité (attention la constante de Lipschitz n'est plus la même). $\square$

Exercice. Soit $E = c_0$ l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 en $+\infty$, muni de la norme uniforme $\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}|u_n|$. On considère la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array}$$

Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\| = \underset{u\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|\varphi(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$.

Démonstration.

1. Soit $u \in E$, alors
$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\,\|u\|_\infty$$
D'où φ est continue et $\|\varphi\| \leq 2$.
De plus, pour $m \in \mathbb{N}$, on considère $u_m = (1, ..., 1, 0, ...)$ (dont les m premiers termes sont des 1).
Ainsi
$$|\varphi(u_m)| = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n}, \|u_m\|_\infty = 1$$
D'où
$$\|\varphi\| \geq \|u_m\|_\infty$$
Ainsi en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient $\|\varphi\| \geq 2$, d'où
$$\|\varphi\| = 2$$

$\square$

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Démonstration. L'unicité du point fixe vient directement de la propriété vérifiée par f.
Pour l'existence on a $x \in E \longmapsto d(x, f(x)) \in \mathbb{R}$ continue par continuité de f (car 1-lipsctzienne), donc, par théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha \in E$ tel que

$$d(\alpha, f(\alpha)) = \underset{x\in E}{inf} d(x, f(x))$$

Si $\alpha \neq f(\alpha)$ alors

$$d(f(\alpha), f(f(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha))$$

ce qui contredit la minimalité de $d(\alpha, f(\alpha))$, d'où $\alpha = f(\alpha)$.
Puis on considère $u_n = d(\alpha, x_n)$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = \alpha$ alors $x_n = \alpha$ pour tout $n \geq n_0$ et le résultat est démontré.
Sinon

$$\forall n \in N, u_{n+1} = d(\alpha, x_{n+1})d(f(\alpha), f(x_n)) < d(\alpha, x_n) = u_n$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement, et est minorée par 0, donc converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$.
Si $l > 0$ alors $u_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or E est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\beta \in E$ tel que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Ainsi

$$l = \underset{n\to+\infty}{lim} d(\alpha, x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, \beta)$$

Puis, par continuité de f,

$$d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(\alpha, f(\beta))$$

ce qui est absurde car

$$d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = l$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = u_{\varphi(n)+1} \geq l$$

Par conséquent $l = 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. □

Exercice. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivables sur $[0, 1]$. On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
3. On considère $f_n(t) = t^n(1-t)$. Calculer $\|f_n\|$ et en déduire que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Démonstration.

1. On peut remarquer que $\|\cdot\|$ est issue du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par
$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$
qui est bien une forme bilinéaire symétrique défine positive. Seule la propriété définie est non triviale : Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$, alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$, ainsi $f = 0$.
2. On suppose qu'il existe $f \in E$ tel que
$$\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
ie
$$|f_n(0) - f(0)|^2 + \int_0^1 |f_n'(t) - f'(t)|^2 dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
D'où
$$|f_n(0) - f(0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \int_0^1 |f_n'(t) - f'(t)|^2 dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Or par inégalité de Cauchy-Schwarz on a
$$\int_0^1 |f_n'(t) - f(t)|dt = \langle 1, |f_n' - f'| \rangle \leq \left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f_n'(t) - f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Puis par théorème fondamental de l'analyse
$$\forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^x |f_n'(t) - f(t)|dt \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt$$
D'où
$$\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. On a
$$\|f_n\|^2 = |f_n(0)|^2 + \int_0^1 |f_n'(t)|^2 dt = 0 + \int_0^1 \left(nt^{n-1}(1-t) - t^n\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt$$
avec $\left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 = t^{2n-2}n^2 - 2t^{2n-1}n(n+1) + t^{2n}(n+1)^2$ puis
$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = n^2 \int_0^1 t^{2n-2}dt - 2n(n+1) \int_0^1 t^{2n-1}dt + (n+1)^2 \int_0^1 t^{2n}dt$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2}{2n-1} - \frac{2n(n+1)}{2n} + \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2}{2n-1} - (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2(2n+1) - (n+1)(2n-1)(2n+1) + (2n-1)(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{4n^2-1}$$

ce qui donne

$$\|f_n\| = \sqrt{\frac{n}{4n^2-1}}$$

Par conséquent

$$\|f_n\| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et d'autre part on a

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Donc les normes ne peuvent pas être équivalentes.

$\square$

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Montrer que f est lipschizienne pour tout norme sur E.

Réponse. Soit b une base de E et $\|\cdot\|_b$ la norme infinie associée. Alors pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in E$, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i)\right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(b_i)\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i)\|_F\right) \|x\|_b$$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

1. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que le résultat précédent est faux dans $\mathbb{Q}^N$.

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
   $$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$
   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$
   Donc
   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$
   Par conséquent
   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$
   Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} l$$
   Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Par conséquent, comme φ est croissante,
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.

3. Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

□

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
On dit que $u \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

On suppose que F est complet (toute de suite de Cauchy dans F est convergeante).
Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall T \in \mathcal{L}(E,F), \|T\| = \underset{x\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Démonstration. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N, |T_m(x) - T_n(x)| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

D'où, comme F est complet, il existe $T(x) \in F$ tel que

$$\|T_n(x) - T(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi l'application T ainsi construite est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, alors par inégalité triangulaire et linéarité des T_n

$$\|T(\lambda x + y) - (\lambda T(x) + T(y))\| \leq \|T_n(\lambda x + y) - T(\lambda x + y)\| + |\lambda| \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - T(y)\|$$

D'où en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$.
De plus T est continue car

$$\forall x \in E, \|T(x)\| = \underset{n\to+\infty}{lim} \|T_n(x)\|$$

Avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\|$$

D'où

$$\|T(x)\| \leq \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \|T_n\|\right) \|x\|$$

avec $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \|T_n\| < +\infty$ car une suite de Cauchy est bornée.
Par conséquent $T \in \mathcal{L}(E,F)$.
De plus pour tout $x \in E$ on a

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\| \|x\|$$

D'où en faisant tendre m vers $+\infty$ on obient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T(x) - T_n(x)\| \leq \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_k\| \|x\|$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T - T_n\| \leq \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\|$$

Or par condition de Cauchy sur $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\|T - T_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$. □

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $\|P\|_\infty := \underset{k\in\mathbb{N}}{max}|a_k|$ et $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k+1}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas comparables (ie qu'il n'existe pas de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $C_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq C_2 \|\cdot\|$).

Démonstration.

1. Les sommes sont en fait finies car il s'agit de polynômes, les axiomes d'une norme s'en déduisent.
2. On considère $P_n = X^n$ et $Q^n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Alors

   $$\|P_n\|_\infty = \|Q_n\|_\infty = 1$$

   et

   $$\|P_n\| = \frac{1}{n+1}, \|Q_n\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

   On en déduit que les normes ne sont pas comparables.

□

Question de cours. Enconcer et démontrer le théorème de Heine.

Réponse. Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ continue, alors f est uniforément continue.

Démonstration. On suppose que f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in X$ tels que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Or X est compact, donc, par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in X$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

Or on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(y_{\varphi(n)}, l) \leq d(x_{\varphi(n)}, l) + d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) < d(x_{\varphi(n)}, l) + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

Or on a f continue sur X, donc

$$f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l), f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$$

D'où

$$d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \leq d((x_{\varphi(n)}), f(l)) + d(f(y_{\varphi(n)}), f(l)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui n'est pas possible car

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) > \varepsilon > 0$$

□

Exercice. On considère $E = C_b(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$$

Montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer $\|T\| = \underset{f\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

Démonstration. Soit $f \in E$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, |T(f)(x)| \leq 3|f(x)| + 2|f(x+4)| \leq 5\|f\|_\infty$$

D'où

$$\|T(f)\|_\infty \leq 5\|f\|_\infty$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $\|T\| \leq 5$.
On considère ensuite $f \in E$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ -\frac{x}{2} + 1 & si \quad 0 < x < 4 \\ -1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Ainsi f est continue, $\|f\|_\infty = 1$ et

$$T(f)(0) = 3f(0) - 2f(4) = 5$$

D'où $\|T(f)\|_\infty \geq 5$, ainsi, d'après ce qui précède, $\|T(f)\|_\infty = 5$ et

$$\|T\| = 5$$

$\square$

Exercice. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère $u : f \in E \longmapsto f(0) \in \mathbb{R}$ et

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f - u(f) id_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Montrer que ψ est :

1. Linéaire.
2. Bijective.
3. Non continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Démonstration.

1. L'application u est linéaire donc ψ également.
2. Soit $f \in E$ tel que $\psi(f) = 0$, alors $f = u(f) id_{\mathbb{R}}$, ainsi $u(f) = f(0) = f(0) \times 0 = 0$, puis $f = 0 \times id_{\mathbb{R}} = 0$ ce qui montre que f est injective.
   Soit $f \in E$, alors
   $$\psi(f + u(f) id_{\mathbb{R}}) = f + u(f) id_{\mathbb{R}} - u(f + u(f) id_{\mathbb{R}}) id_{\mathbb{R}} = f - u(f) u(id_{\mathbb{R}}) = f - 0 = f$$
   D'où ψ est surjective.
3. On suppose que ψ est continue sur E.
   Alors $\varphi = u(id_E) id_{\mathbb{R}} = id_E - \psi$ est continue sur E comme somme d'applications continues.
   De plus ψ est linéaire, donc ψ est k-lipschizienne :
   $$\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_1 \leq k \|f\|_1$$
   Or
   $$\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 |\varphi(f)(x)| dx = \int_0^1 |f(0) x| dx = \frac{|f(0)|}{2}$$
   Donc
   $$\forall f \in E, |f(0)| \leq 2k \|f\|_1$$
   ce qui n'est pas possible en considérant $f_n \in E$ triangulaire positive tel que $f_n(0) = n$ et $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

$\square$

Exercice. Soit $E = C([a,b],\mathbb{K})$ muni des normes $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$) définies par

$$\forall f \in E, \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Montrer que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

En déduire $\underset{p\to+\infty}{lim} \|f\|_p$ pour $f \in E$.

Démonstration. Si $f = 0$ alors $\|f\|_p = 0 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puis si f non identiquement nulle alors

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Comme f est continue sur $[a,b]$ compact, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors par continuité en x_0, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [a,b], |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0)| - |f(x)| = |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^p dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p dx \geq 2\delta (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p$$

Par conséquent

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

D'où en faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient

$$\|f\|_\infty \leq \underset{p\to+\infty}{lim} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi $\underset{p\to+\infty}{lim} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. $\square$