Question de cours. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

Réponse. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements tels que $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, et $A \in \mathcal{A}$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Démonstration. Comme $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et

$$\Omega \backslash N = \bigsqcup_{i\in I} B_i$$

Ainsi on a la réunion disjointe

$$A = (A\cap N) \sqcup (A \cap (\Omega\backslash N)) = (A\cap N) \sqcup \left(A \cap \bigsqcup_{i\in I} B_i \right) = (A\cap N) \sqcup \left(\bigsqcup_{i\in I} (A\cap B_i) \right)$$

Ainsi, par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(A) = 0 + \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

$\square$

Exercice. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que pour $x = f'(u), y = f'(v) \in f'(I)$ il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} < z < \frac{f(v+h) - f(v)}{h}$$

En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x, y \in f'(I)$ tel que $x < y$, et $z \in]x, y[$.
Il existe $u, v \in I$ tels que $x = f'(u)$ et $y = f'(v)$.
Or f est dérivable, donc

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(u) = x, \frac{f(v+h) - f(v)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(v) = y$$

Or $x < z < y$, donc il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} < z < \frac{f(v+h) - f(v)}{h}$$

On considère ensuite

$$g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \end{array}$$

avec J sous-intervalle de I contenant x et y.
On a alors $g(u) < z < g(v)$ avec g continue car f l'est, ainsi, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $w \in [u, v]$ tel que

$$z = g(w) = \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

De plus par théorème des accroissements finis il existe $c \in [w, w+h]$ tel que

$$f(w+h) - f(w) = hf'(c)$$

Ainsi

$$z = f'(c) \in f'(I)$$

ce qui montre que $f'(I)$ est un intervalle. $\square$

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, ..., n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}}) ... \mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Démonstration.

1. On considère $\Omega = \{1, ..., n\}$, la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, ainsi
$$\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$
On suppose que $p \mid n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \alpha p$, alors
$$A_p = \{kp, k \leq \alpha, k \in \mathbb{N}^*\}$$
Donc $|A_p| = \alpha$ et $\mathbb{P}(A_p) = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}$.
2. Soit $i_1, ..., i_r \in [\![1, k]\!]$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $p_{i_1} \mid m$, ..., et $p_{i_r} \mid m$ si et seulement si $p_{i_1} ... p_{i_r} \mid m$. Donc
$$A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}} = A_{p_{i_1} ... p_{i_r}}$$
Ainsi, d'après la question précédente,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1} ... p_{i_r}}) = \frac{1}{p_{i_1} ... p_{i_r}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}}) ... \mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
3. On considère B_n l'ensemble des diviseurs de n inférieurs à n, alors $|B_n| = \phi(n)$.
Soit $p_1, ..., p_n$ les diviseurs premiers de n, on a alors pour $l \in \mathbb{N}^*$, $l \in B_n$ si et seulement si $l \leq n$ et l n'est pas multiple d'aucun des p_i pour $i \in [\![1, k]\!]$.
Ainsi
$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{p_i}^c$$

Or les A_i sont indépendants, donc les A_i^c également, d'où

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i}^c) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i}) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

De plus $\mathbb{P}$ étant uniforme, on a

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{|B_n|}{n} = \frac{\phi(n)}{n}$$

D'où

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$\square$

Question de cours. Que peut-on dire de l'image (et de l'image réciproque) d'une partie connexe par arcs par une application continue ? Le démontrer.

Réponse. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ continue et C une partie connexe par arcs de E, alors $f(C)$ est une partie connexe par arcs de F.
De plus si C' est une partie connexe par arcs de F alors $f^{-1}(C')$ n'est pas nécessairement une partie connexe par arcs de E.

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in f(C)$, alors il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Or C est connexe par arcs donc il existe un chemin continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ reliant x et y.
Ainsi $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow f(C)$ est un chemin continu relant $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Par conséquent $f(C)$ est connexe par arcs.
Si $E = [0,1] \cup [2,3]$, $F = \mathbb{R}$ et $f : x \in E \longmapsto 0 \in F$, alors $\{0\}$ est connexe par arcs dans F, f est continue mais $E = f^{-1}(\{0\})$ n'est pas connexe par arcs. $\square$

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$.
2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n, x.
   Ainsi, par lemme de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

2. On a par inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n\delta) \leq \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$

   Or $S_n \sim B(n,x)$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. La fonction f est continue sur $[0,1]$ compact, donc par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1$.
Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right)$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}}\right)$$

Ainsi, avec ce qui précède,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi

$$\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Or $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $n \geq N$.
Donc, pour $n \geq N$,

$$\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

□

Exercice. On considère un chat Gribouille. Gribouille a trois états X possibles : 1 il mange, 2 il dort, 3 il joue.
Le comportement de Gribouille est une chaine de Markov et on a : A l'instant n (pour $n \in \mathbb{N}$) :

— Si Gribouille mange alors la probabilité que Gribouille dorme à l'instant $n+1$ est $\frac{1}{3}$ et celle que Gribouille joue est $\frac{1}{2}$.
— Si Gribouille dort alors la probabilité que Gribouille mange à l'instant $n+1$ est $\frac{1}{3}$ et celle que Gribouille joue est $\frac{1}{2}$.
— Si Gribouille joue alors la probabilité que Gribouille mange à l'instant $n+1$ est $\frac{2}{3}$ et celle que Gribouille dorme est $\frac{1}{3}$.

Le maitre de Gribouille part à l'instant 0 pendant que son chat Gribouille dort : Il rentre à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que Gribouille dorme encore ?

Démonstration. La matrice de transition correspondant à la chaîne de Markov est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'instant initial on a

$$\mu_0 = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \mathbb{P}(X_0 = 3)) = (0, 1, 0)$$

Ainsi à l'instant n on a

$$\mu_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = 3)) = (0, 1, 0)\, A^n$$

Or

$$\chi_{6A} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -3 \\ -2 & X-1 & -3 \\ -4 & -2 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X-1)X - 12 - 24 - 12(X-1) - 4X - 6(X-1)$$

$$= X^3 - 2X^2 + X - 12 - 24 - 12X + 12 - 4X - 6X + 6$$
$$= X^3 - 2X^2 - 21X - 18 = (X-6)(X+3)(X+1)$$

est scindé à racines simples, donc la matrice est diagonalisable.
Puis après détermination d'une base diagonalisante on obtient

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \end{pmatrix}^{-1}$$

Puis

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{33}} \end{pmatrix}^{-1}$$

Et enfin on obtient μ_n. $\square$

Question de cours. Quelles sont exactement les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$? Le démontrer.

Réponse. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x, y \in I$, alors comme I est un intervalle de $\mathbb{R}$, tout z compris entre x et y est dans I.
Ainsi l'application

$$\gamma : t \in [0,1] \longmapsto (1-t)x + tyI$$

est bien définie, continue et part de x pour arriver à y.
On a donc un chemin continue de x à y dans I, ce qui montre que I est une partie connexe par arcs.
Réciproquement soit C une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$.
S'il existe $x, y \in I$ tel que

$$\forall z \in [x,y], z \notin C$$

Alors en particulier $x \neq y$ et $z := \frac{x+y}{2} \notin C$.
Or C est connexe par arcs, donc il existe un chemin continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ reliant x et y, ainsi, par théorème des valeurs intermédiaires il existe $t \in [0,1]$ tel que $z = \gamma(t) \in C$ ce qui n'est pas le cas.
Par conséquent C est un intervalle. $\square$

Exercice. Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle va être la loi limite de X_n quand n tend vers $+\infty$?

Réponse. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Z = k)$$

avec Z une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, k \in [\![0, n]\!]$$

On peut donc caluler

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$$

Or

$$(1-p_n)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = exp\left(nlog\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} exp(-\lambda)$$

et

$$(1-p_n)^{-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$\square$

Exercice.

1. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance, ie
$$\mathbb{E}(X) = +\infty$$
2. On considère une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que X admet une espérance finie mais pas de moment d'ordre 2, ie
$$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$$

Démonstration.

1. On a bien
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
Cependant
$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \mathbb{P}(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$a_n := \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$
Donc
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{4}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{2}{k} = 1 - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
De plus on a $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$, donc
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = +\infty$$
Cependant $n^2 a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$, donc
$$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$$

$\square$

Exercice. Soit A une partie d'un espace d'un espace vectoriel normé E et $f : A \longrightarrow F$ continue avec F un espace vectoriel normé.
On suppose que f est localement constante ie pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est constante sur $A \cap B(a, r)$.

1. Soit $a, b \in A$ et γ un chemin continu reliant a et b, montrer que

$$sup\,\{s \in [0,1], f(\phi(s)) = f(a)\} = 1$$

2. En déduire que f est constante sur A.

Démonstration.

1. Soit $H = \{s \in [0,1], f(\phi(s)) = f(a)\}$, cet ensemble est non vide est majorée, il admet donc une borne supérieure que l'on note t.
Il existe donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tel que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, ainsi, par continuité

$$f(\phi(t)) = \underset{n\to+\infty}{lim} f(\phi(s_n)) = f(a)$$

D'où $t \in H$ ie il s'agit d'un maximum.
Si $t < 1$, soit $c = \phi(t)$, alors, par locale continuité, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit constante sur $A \cap B(c, r)$.
De plus par continuité de ϕ en t et que $t < 1$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t + \varepsilon < 1$ et

$$|\phi(t+\varepsilon) - c| = |\phi(t+\varepsilon) - \phi(t)| \leq r$$

ie $\phi(t+\varepsilon) \in B(c, r)$, d'où, comme f est constante sur $A \cap B(c, r)$,

$$f(\phi(t+\varepsilon)) = f(c) = f(\phi(t)) = f(\phi(a))$$

ie

$$t < t + \varepsilon \in H$$

ce qui contredit la définition de t.
Par conséquent $t = 1$.

2. On a donc

$$f(a) = f(\phi(1)) = f(b)$$

Ce qui montre que f est constante sur A.

$\square$