Question de cours. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice. Soit $a, t \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer qu'on a
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme dans $\{-1,1\}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer qu'on a
$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$
3. En déduire
$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Exercice. On considère une particule qui possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Cette particule peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- Si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- Si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$

On suppose également que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On note $\mu_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$. Déterminer $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $\mu_{n+1} = \mu_n A$.
3. En déduire la loi de X_n.
4. Montrer que les lois μ_n admettent une limite quand $n \to +\infty$.
5. On considère $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer la loi faible des grands nombres.

Exercice.

1. Montrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer la somme.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

   (a) Vérifier que l'égalité précédente définit bien une loi conjointe.

   (b) Montrer que X et Y suivent la même loi.

   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire entière positive indépendante des précédentes. On considère la variable $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$.
Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n.

Exercice.

1. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ dont la loi est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$

   Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

2. On considère une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

   Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que X admet une espérance finie mais pas de moment d'ordre 2.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quels sont les liens entre les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire et sa fonction génératrice ?

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, ..., n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0, 1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche