Question de cours. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quels sont les liens entre les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire et sa fonction génératrice ?

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Que peut-on dire de l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F ?

Exercice. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire entière positive indépendante des précédentes. On considère la variable $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} X_n$.

Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n.

Exercice. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $\{x \in H, x > 0\}$ est minoré. On notera alors $m = \inf\{x \in H, x > 0\}$.
2. On suppose $m > 0$. Montrer que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose $m = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note (x, y) le segment $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation R sur U par

$$\forall x, y \in U, xRy \iff (x, y) \subset U$$

1. Montrer que R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation R. Montrer que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que U se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de Weierstrass.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble A des suites croissantes est un fermé de E.
2. Montrer que l'ensemble B des suites convergeantes vers 0 est un fermé de E.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E. On peut donc considérer

$$diam(A) := \sup_{x,y\in A} \|x-y\|$$

1. Montrer que $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés dans E.
2. Comparer $diam(\mathring{A}), diam\left(\overline{A}\right)$ et $diam(A)$.
3. (a) Soit $x \in A$ et $u \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ existe.
   (b) En déduire que toute demi-droite issue de $x \in A$ coupe $Fr(A)$.
   (c) Montrer que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche