Question de cours. Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. L'image réciproque d'une partie connexe par arcs par une application continue est-elle également connexe par arcs ? Si oui le démontrer. Sinon trouver un contre-exemple

Exercice. Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique est uniformément continue.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, A un compact de E et

$$L_A := \{f \in L(E), f(A) \subset A\}.$$

1. On suppose que A contient une boule ouverte. Montrer que A contient une base $(e_1, ..., e_n)$ de E.
2. Dans ce cas, en déduire que L_A est un compact de $L(E)$ pour la norme infini associée à cette base $N(f) := \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|$.
3. Montrer que L_A est un compact de $L(E)$ si et seulement si $Vect(A) = E$.

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.
2. Montrer que si A et B sont connexes par arcs alors $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f^{-1}(\{a\})$ soit compact pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose $n \geq 2$ et $0 \in \mathrm{Im}(f)$. Montrer que f admet un extremum global.
2. En déduire que si $n \geq 2$ alors f admet un extremum global.
3. Ce résultat est-il encore vrai si $n = 1$?

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Indication : Pour l'un des sens, on pourra montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Que peut-on dire de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie compacte par une application continue ?

Exercice. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée. Le résultat est-il encore valable si l'on suppose seulement f continue ? Le démontrer.

Exercice. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie connexe par arcs de E et $f : A \longrightarrow F$ continue.
On suppose que f est localement constante : pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est constante sur $A \cap B(a,r)$.

1. Soit $a, b \in A$ et γ un chemin continu reliant a et b, montrer que

$$sup\{s \in [0,1], f(\gamma(s)) = f(a)\} = 1$$

2. En déduire que f est constante sur A.

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.
On dit que $u \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

On suppose que F est complet (i.e. toute de suite de Cauchy dans F est convergeante dans F).
Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall T \in \mathcal{L}(E,F), \|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche