Question de cours. Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. L'image réciproque d'une partie connexe par arcs par une application continue est-elle également connexe par arcs ? Si oui le démontrer. Sinon trouver un contre-exemple

Démonstration. On considère E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ continue et C une partie connexe par arcs de E. Soit $a, b \in f(C)$. Alors il existe $x, y \in C$ tels que

$$a = f(x), b = f(y).$$

Or C est connexe par arcs, donc il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On considère $\gamma' := f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow f(C)$ continue comme composée d'applications continues et vérifie

$$\gamma'(0) = f(x) = a, \gamma'(1) = f(y) = b.$$

Ainsi $f(C)$ est connexe par arcs.
L'image réciproque d'une partie connexe par arcs n'est pas connexe par arcs en général. On peut considérer $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ continue et $C = [1, +\infty[$ connexe par arcs mais $f^{-1}(C) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ non connexe par arcs. $\square$

Exercice. Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-T, 2T]$: il existe $\delta \in]0, T]$ tel que

$$\forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \delta$. On considère $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x' := x + kT \in [0, T]$$

On considère $y' := y + kT$. Alors

$$|x' - y'| = |x - y| \leq \delta$$

Ainsi

$$y' \in [x' - \delta, x' + \delta] \subset [-T, 2T].$$

D'où, par T-périodicité,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, A un compact de E et

$$L_A := \{f \in L(E), f(A) \subset A\}.$$

1. On suppose que A contient une boule ouverte. Montrer que A contient une base $(e_1, ..., e_n)$ de E.

2. Dans ce cas, en déduire que L_A est un compact de $L(E)$ pour la norme infini associée à cette base $N(f) := \max_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|$.
3. Montrer que L_A est un compact de $L(E)$ si et seulement si $Vect(A) = E$.

Démonstration.

1. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$B(x_0, r) \subset A.$$
Soit $(e_1', ..., e_n')$ une base de E. On considère $e_i'' := \frac{r}{2\|e_i'\|} e_i'$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $(e_1'', ..., e_n'')$ est une base de E. Puis on considère $e_i := e_i'' + x_0$. Alors
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \|e_i - x_0\| = \frac{r}{2} < r \text{ } i.e. \text{ } e_i \in B(x_0, r)$$
et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. Donc A contient une base de E.
2. Comme A est compacte, A est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit $f \in L_A$. Alors $N(f) \leq M$. Donc L_A est une partie bornée de $L(E)$.
Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in L_A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $f \in L(E)$. Soit $x \in A$. Alors $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de A convergeant vers $f(x)$:
$$\|f_p(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i (f_p(e_i) - f(e_i)) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(f_p - f) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'où, comme A est fermée, $f(x) \in A$. Ainsi $f \in L_A$. D'où, par caractérisation séquentielle des fermés, L_A est fermé.
Ainsi, comme $L(E)$ est dimension finie, L_A est un compact de $L(E)$.
3. <u>Sens direct</u> : On suppose que $Vect(A) \neq E$. Soit $(a_1, ..., a_m)$ une base de $Vect(A)$ que l'on complète en une base $(a_1, ..., a_n)$ de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda \in L(E)$ défini par
$$\forall i \in [\![1, m]\!], f(a_i) = a_i, \forall i \in [\![m+1, n]\!], f(a_i) = \lambda a_i.$$
Alors $f_\lambda \in L_A$ et
$$N(f_\lambda) := \max_{1 \leq i \leq n} \|f_\lambda(a_i)\| = \lambda \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i\|.$$
Donc L_A n'est pas borné, donc non compact.
<u>Sens indirect</u> : On suppose $Vect(A) = E$, autrement dit A contient une base de E. Ainsi, d'après la question précédente, L_A est un compact de $L(E)$.

□

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que
$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$
Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie
$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Démonstration. L'unicité du point fixe vient directement de la propriété vérifiée par f.
Pour l'existence on a $x \in E \longmapsto d(x, f(x)) \in \mathbb{R}$ continue par continuité de f (car 1-lipsctzienne), donc, par théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha \in E$ tel que

$$d(\alpha, f(\alpha)) = \underset{x \in E}{inf} d(x, f(x))$$

Si $\alpha \neq f(\alpha)$ alors

$$d(f(\alpha), f(f(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha))$$

ce qui contredit la minimalité de $d(\alpha, f(\alpha))$, d'où $\alpha = f(\alpha)$.
Puis on considère $u_n = d(\alpha, x_n)$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = \alpha$ alors $x_n = \alpha$ pour tout $n \geq n_0$ et le résultat est démontré.
Sinon

$$\forall n \in N, u_{n+1} = d(\alpha, x_{n+1}) d(f(\alpha), f(x_n)) < d(\alpha, x_n) = u_n$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît strictement, et est minorée par 0, donc converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$.
Si $l > 0$ alors $u_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or E est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\beta \in E$ tel que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Ainsi

$$l = \underset{n \to +\infty}{lim} d(\alpha, x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, \beta)$$

Puis, par continuité de f,

$$d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d(\alpha, f(\beta))$$

ce qui est absurde car

$$d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = l$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = u_{\varphi(n)+1} \geq l$$

Par conséquent $l = 0$ et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$. $\square$

Question de cours. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Démonstration. On considère E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergeante vers $x \in E$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{B}(0,r)^{\mathbb{N}}.$$

Donc

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F \cap \overline{B}(0,r))^{\mathbb{N}}$$

avec $F \cap \overline{B}(0,r)$ fermé borné dans F de dimension finie donc compact. Ainsi il existe $x^* \in \overline{B}(0,r) \cap F \subset F$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice telle que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^*.$$

Puis, par unicité de la limite, $x = x^* \in F$. D'où, par caractérisation séquentielle des fermés, F est fermé. $\square$

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x,y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.
2. Montrer que si A et B sont connexes par arcs alors $A + B$ est connexe par arcs.

Démonstration.

1. On suppose que A est compact et B fermé. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $z \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
   Or A est compact, donc il existe une extractrice φ et $x \in A$ tel que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   Ainsi $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z - x$, d'où, comme B est fermé, $z - x \in B$, i.e. $z \in A + B$.
   Donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $A + B$ est fermé.
2. On suppose que A et B sont connexes par arcs. Soit $a + b, a' + b' \in A + B$. Or A et B sont connexes par arcs, donc il existe $\gamma_a : [0,1] \longrightarrow A$ et $\gamma_b : [0,1] \longrightarrow B$ continues telles que

   $$\gamma_a(0) = a, \gamma_a(1) = a', \gamma_b(0) = b, \gamma_b(1) = b'.$$

   On considère

   $$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A + B \\ t & \longmapsto & \gamma_a(t) + \gamma_b(t) \end{array}$$

   Alors γ est bien défini, continu et vérifie

   $$\gamma(0) = \gamma_a(0) + \gamma_b(0) = a + b, \gamma(1) = \gamma_a(1) + \gamma_b(1) = a' + b'.$$

   D'où $A + B$ est connexe par arcs.

$\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f^{-1}(\{a\})$ soit compact pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose $n \geq 2$ et $0 \in \mathrm{Im}(f)$. Montrer que f admet un extremum global.
2. En déduire que si $n \geq 2$ alors f admet un extremum global.
3. Ce résultat est-il encore vrai si $n = 1$?

Démonstration.

1. On considère $K := f^{-1}(\{0\})$. Alors, par hypothèse, K est un compact de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$K \subset \overline{B}(0, r).$$
De plus f ne s'annule par sur
$$C = \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(0, r)$$
connexe par arcs car $n \geq 2$. Donc, par continuité, f garde un signe constant sur C. Or f est continue sur la compact $\overline{B}(0, r)$, donc, par théorème des bornes atteintes, f admet un maximum M et minimum m sur $\overline{B(0, r)}$. Et, comme $K \subset \overline{B}(0, r)$, on a
$$m \leq 0 \leq M.$$
Si f est positive sur C alors m est un minimum global de f et si f est négative sur C alors M est un maximum global de f.
2. On considère
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(0) \end{array}$$
Alors $0 \in \mathrm{Im}(g)$, g est continue et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,
$$g^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = a + f(0)\} = f^{-1}(\{a + f(0)\})$$
compact. Donc, d'après la question précédente, g admet un extremum global, donc f également.
3. Si $n = 1$ et $f = id_{\mathbb{R}}$ alors $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ compact pour tout $a \in \mathbb{R}$ mais f n'admet pas d'extremum global.

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Indication : Pour l'un des sens, on pourra montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
   $$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$
   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$
   Donc
   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$
   Par conséquent
   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$
   Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} l$$
   Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Par conséquent, comme φ est croissante,
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.

Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. $\square$

Question de cours. Que peut-on dire de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie compacte par une application continue ?

Réponse. Soit E, F deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ et C un compact de E. Alors $f(C)$ est un compact de F. Cependant ce n'est plus vrai pour l'image réciproque. On peut par exemple considérer $E = F = \mathbb{R}$ et $f \equiv 0$, alors $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compacte car non borné.

Exercice. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée. Le résultat est-il encore valable si l'on suppose seulement f continue ? Le démontrer.

Démonstration. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y \in]0,1[, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$

On considère une subdivision $(x_0, ..., x_n)$ de $[0,1]$ de pas δ, et $I_j := [x_j, x_{j+1}] \cap]0,1[$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$]0,1[= \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j.$$

Soit $x \in]0,1[$. Alors il existe $j \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in I_j$. Ainsi

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j)| \leq 1 + \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i)|.$$

D'où f est bornée sur $]0,1[$.
Puis si f est seulement continue alors le résultat n'est plus vérifié. On considère par exemple $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]0,1[$ mais non bornée. □

Exercice. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie connexe par arcs de E et $f : A \longrightarrow F$ continue.
On suppose que f est localement constante : pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est constante sur $A \cap B(a, r)$.

1. Soit $a, b \in A$ et γ un chemin continu reliant a et b, montrer que

$$sup \{s \in [0,1], f(\gamma(s)) = f(a)\} = 1$$

2. En déduire que f est constante sur A.

Démonstration.

1. Soit $H = \{s \in [0,1], f(\gamma(s)) = f(a)\}$, cet ensemble est non vide (car contient 0) et majorée (par 1), il admet donc une borne supérieure que l'on note t.
   Il existe donc $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tel que $s_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t$, ainsi, par continuité

$$f(\gamma(t)) = \underset{n \to +\infty}{lim} f(\gamma(s_n)) = f(a)$$

   D'où $t \in H$ i.e. il s'agit d'un maximum.
   On suppose $t < 1$. On considère $c = \gamma(t) \in A$. Alors, par locale continuité, il existe

$r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit constante sur $A \cap B(c, r)$.
De plus, par continuité de γ en t et comme $t < 1$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t + \varepsilon < 1$ et

$$|\gamma(t + \varepsilon) - c| = |\gamma(t + \varepsilon) - \gamma(t)| \leq r$$

i.e. $\gamma(t + \varepsilon) \in B(c, r)$, d'où, comme f est constante sur $A \cap B(c, r)$,

$$f(\gamma(t + \varepsilon)) = f(c) = f(\gamma(t)) = f(\gamma(a))$$

i.e.

$$t < t + \varepsilon \in H$$

ce qui contredit la définition de t.
Par conséquent $t = 1$.

2. On a donc

$$f(a) = f(\gamma(1)) = f(b)$$

Ce qui montre que f est constante sur A.

$\square$

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.
On dit que $u \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

On suppose que F est complet (i.e. toute de suite de Cauchy dans F est convergeante dans F).
Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall T \in \mathcal{L}(E, F), \|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\|$$

Démonstration. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |T_m(x) - T_n(x)| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

D'où, comme F est complet, il existe $T(x) \in F$ tel que

$$\|T_n(x) - T(x)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi l'application T ainsi construite est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, alors par inégalité triangulaire et linéarité des T_n

$$\|T(\lambda x + y) - (\lambda T(x) + T(y))\| \leq \|T_n(\lambda x + y) - T(\lambda x + y)\| + |\lambda| \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - T(y)\|$$

D'où en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$.
De plus T est continue car

$$\forall x \in E, \|T(x)\| = \lim_{n \to +\infty} \|T_n(x)\|$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\|$$

D'où

$$\|T(x)\| \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \right) \|x\|$$

avec $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ car une suite de Cauchy est bornée.
Par conséquent $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
De plus pour tout $x \in E$ on a

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k - T_n\| \|x\|$$

D'où en faisant tendre m vers $+\infty$ on obient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T(x) - T_n(x)\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k - T_k\| \|x\| .$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T - T_n\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k - T_n\| .$$

Or, par condition de Cauchy sur $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \|T_k - T_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\|T - T_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui montre que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$. $\square$