Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Exercice. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F.

1. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers f. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que le résultat précédent est faux si on suppose seulement la convergence simple des f_n.

Exercice. Soit M une matrice symétrique d'ordre n dont tous les coefficients sont positifs.

1. Montrer que l'on peut définir

$$\alpha = \sup\left\{\langle X, MX\rangle, X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\right\}$$

   et qu'il s'agit une valeur propre de M.
2. Montrer que M admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives et associé à une valeur propre positive.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle i.e.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[& \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} A^k \end{array} .$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^1 et vérifie

$$(I_n - tA)f'(t) = A.$$

3. Dans le cas où $n = 1$, déterminer f.

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de continuité sous le signe somme d'une série de fonctions vectorielles.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.

1. Montrer que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXAX > 0\}.$$

2. Montrer la continuité de exp sur $M_n(\mathbb{R})$. En déduire la continuité de exp sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $exp(A) = exp(A')$.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(exp(A'))$.
   (b) En déduire que A et A' sont co-orthodiagonalisables, i.e. orthodiagonalisable dans la même base orthonormée, puis que $A = A'$.
5. On considère $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (Im(exp))^{\mathbb{N}} = (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B = exp(A) \in Im(exp) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S) \text{ appelé rayon spectral.}$$

   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

   En déduire que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche