Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Le démontrer.

Exercice. Soit G un groupe abélien fini (dont la loi est notée multiplicativement).

1. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b premiers entre eux, montrer que xy est d'ordre ab.
2. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b, montrer que xy est d'ordre $\mathrm{ppcm}(a, b)$.
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que l'ordre de z soit le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G (appelé exposant du groupe G).
4. En déduire que pour K un corps et G un sous-groupe fini de $K^\times$, G est cyclique.

Exercice. On considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le PGCD entre $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que toutes ses racines réelles sont de multiplicité paire. En déduire qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F.

1. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers f. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Montrer que le résultat précédent est faux si on suppose seulement la convergence simple des f_n.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = te^t$.

Question de cours. Déterminer la dérivée de $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le démontrer.

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow E$ tels que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

On considère $u := \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t)dt \in E$ et, pour tout $t \in [a,b]$,

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \overset{\perp}{\bigoplus} (Vect(u))^{\perp}$.
Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\| \, u$.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $(1+t)y'(t) + y(t) = 1 + \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^t$.

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire intégrale pour une fonction à valeurs vectorielles définies sur un segment de $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle i.e.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}\right[& \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} A^k \end{array} .$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^1 et vérifie

$$(I_n - tA) f'(t) = A.$$

3. Dans le cas où $n = 1$, déterminer f.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t + 1)e^{-t}$.