Question de cours. Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.

Exercice. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, a_0 = \alpha \in \mathbb{R}, a_1 = \beta \in \mathbb{R}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice. Soit f la fonction somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.
On suppose que

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

1. On suppose de plus $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, montrer que $\sum a_n$ converge de somme égale à l.
2. Sans cet hypothèse montrer que ce résultat est faux en général.

Exercice. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire le développement en série entière en 0.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice. On considère f définie par

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle, en déduire le développement en série entière de f et donner le rayon de convergence.

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme $f(z)$.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

2. En déduire que si f admet un maximum local en 0, alors f est une fonction constante.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Une fonction de classe C^∞ est-elle développable en série entière ? Si oui donner son développement en série entière au voisinage de 0. Si non connaissez-vous un contre-exemple. La réciproque est-elle vraie ? Si oui le démontrer. Si non connaissez-vous un contre-exemple.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$.

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer la partie imaginaire de $\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x sin(\theta)e^{i\theta}}$, en déduire le développement en série entière de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto arctan\left(x - \frac{1}{tan(\theta)}\right)$$

Exercice. On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \int_0^1 t^k sin(tx) dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1) f(x) = sin(x)$$

2. Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de

$$xy' + (k+1)y = sin(x)$$

en précisant le rayon de convergence.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche