Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Réponse. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Démonstration. La fonction ln est strictement concave, donc

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(x_k)}{n} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}\right)$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$.
Ainsi, par croissance de exp,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

□

Exercice. Soit I intervalle réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, on dit que f est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe sur I.

1. Montrer que si f est log-convexe alors f est convexe.
2. Montrer que si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe, alors

   $$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$

   Indication : Faire tendre α vers 0 dans la définition de f^α convexe.
3. En déduire que si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe, alors f est log-convexe.
4. Citer un exemple de fonction convexe non log-convexe.

Démonstration.

1. On suppose que f est log-convexe, ainsi la fonction $\ln(f)$ est convexe, donc, par composition de fonctions convexes, $f = \exp(\ln(f))$ est convexe.
2. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe.
   Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.
   Alors, par convexité,

   $$f((1-\lambda)x + \lambda y)^\alpha \leq (1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha$$

   Donc, par croissance de la fonction ln,

   $$\alpha \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \ln\left((1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha\right) =: \varphi(\alpha)$$

   ie

   $$(1)\ \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

Or $\varphi(\alpha) \underset{\alpha \to 0^+}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$, donc φ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.
De plus φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(1-\lambda)\ln(f(x))f(x)^\alpha + \lambda\ln(f(y))f(y)^\alpha}{(1-\lambda)f(x)^\alpha + \lambda f(y)^\alpha}$$

Donc

$$\varphi'(\alpha) \underset{\alpha \to 0^+}{\longrightarrow} (1-\lambda)\ln(f(x)) + \lambda\ln(f(y)) = \ln(f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda)$$

Ce qui signifie que φ est dérivable en 0.
D'où, en faisant tendre α vers 0 dans l'inégalité (1), on obtient

$$\ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \varphi'(0) = \ln(f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda)$$

ie, par croissance de exp, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda$.

3. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe.
Alors d'après la question précédente,

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$

Donc, par croissance de ln,

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \ln(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leq \ln((f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda) = (1-\lambda)\ln(f(x))+\lambda\ln(f(y))$$

Ce qui montre que f est log-convexe.

4. La fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas log-convexe car $x \longmapsto \ln(x^2) = 2\ln(x)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

Exercice.

1. Montrer que la convergence absolue d'une intégrale entraîne sa convergence.
2. Montrer que la réciproque est fausse en citant un contre-exemple.

Démonstration.

1. Soit $a, b \in \overline{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$.
On considère $f_+ = max(f,0)$ et $f_- = min(f,0)$.
Alors f_+ et f_- sont deux fonctions positives vérifiant

$$\int_a^b f_+(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx, \int_a^b f_-(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Ainsi $f = f_+ - f_-$ admet une intégrale convergente $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$.

2. On considère $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{sin(x)}{x} \end{array}$. Alors f admet une intégrale convergente mais n'est pas absolument intégrable sur $]0,+\infty[$.

□

Exercice. Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in [0,1[$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Réponse. L'intégrale est convergente.

Démonstration. Comme $l \in]0,1[$, il existe $q \in]l,1[$.
De plus $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$$

ie

$$\forall x \geq A, f(x+1) \leq qf(x)$$

On en déduit donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in A, f(x+n) \leq q^n f(x)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_A^{A+n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A+k}^{A+k+1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(x+k)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} q^k \int_A^{A+1} f(x)dx$$

Or $0 < q < 1$, donc en faisnant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\int_A^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, puis on en déduit $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. $\square$

Question de cours. Donner la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ et $\int_0^1 x^\alpha dx$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et le démontrer.

Réponse. L'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < -1$ et l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.

Démonstration. Pour $\alpha = -1$ on a la fonction ln comme primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ce qui permet de conclure que les intégrales sont divergentes pour $\alpha = -1$.
Puis pour $\alpha \neq -1$ on a la fonction $x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ comme primitive ce qui permet également de convlure sur la convergence ou non des intégrales. $\square$

Exercice. Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

Démonstration. La fonction ln est concave, donc pour $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall \lambda \in [0,1], \ln((1-\lambda)u + \lambda v) \geq (1-\lambda)\ln(u) + \lambda\ln(v) = \ln\left(u^{1-\lambda}v^\lambda\right)$$

Puis, par croissance de exp,

$$\forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)u + \lambda v \geq u^{1-\lambda}v^\lambda$$

D'où, pour $\lambda = \frac{1}{q}$, on a $1 - \lambda = \frac{1}{p}$ et

$$\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v \geq u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}}$$

$\square$

Exercice. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$ et que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$.

Démonstration. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n - \frac{1}{n^2}, b_n = n + \frac{1}{n^2}$$

Puis la fonction affine par morceaux et continue $f; [0, +\infty[$ définie par :

1. $f = 0$ sur $[0, +\infty[\setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\right)$.
2. $f = 1$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.
3. f affine sur les $[a_n, n]$ et les $[n, b_n]$.

Ainsi

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

De plus f ne tend pas vers 0 vers $+\infty$ car $f(n) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. $\square$

Exercice. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Démonstration. Comme $a < 0$ et $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{a}{2}$$

Puis, par intégration,

$$\forall x \geq A, \ln(f(x)) - \ln(f(A)) \leq \frac{a(x-A)}{2}$$

Or exp est croissante, donc

$$\forall x \geq A, f(x) \overset{\star}{\leq} f(A)e^{\frac{a(x-A)}{2}}$$

De plus $a < 0$ donc $x \longmapsto e^{\frac{a(x-A)}{2}}$ est intégrable, d'où, par comparaison, f est intégrable sur $[A, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité.
Puis $f' \leq \frac{af}{2} \leq 0$ sur $[A, +\infty[$, ainsi

$$\forall x \geq A, \int_A^x |f'(t)|dt = -\int_A^x f(t)dt = f(A) - f(x)$$

Or, d'après $\star$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où f' est absolument intégrable sur $[A, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité. $\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Réponse. Soit $f, g \in C^1([0,+\infty[)$. Alors

$$\forall x \in [0,+\infty[, \int_0^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - f(0)g(0) - \int_0^x f'(t)g(t)dt$$

On en déduit donc les conditions pour que les intégrales soient convergentes.

Démonstration. Comme f et g sont de classe C^1, leur produit $f \times g$ est dérivable et

$$\forall x \in [0,+\infty[, (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ainsi, par intégration

$$\forall x \in [0,+\infty[, f(x)g(x) - f(0)g(0) = \int_0^x f'(t)g(t)dt + \int_0^x f(t)g'(t)dt$$

ce qui montre l'équation de la réponse et conclut. □

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale

$$B_n(f) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \end{array}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est convexe.

Démonstration.

1. Pour $n = 1$: On a $B_1(f) : x \in [0,1] \longmapsto f(0(1-x)) + f(1)x$, donc $B_1(f)$ est affine donc convexe.
2. Pour $n = 2$: On a $B_2(f)$ polynomiale donc deux fois dérivable et

   $$\forall x \in [0,1], B_2(f)''(x) = 2\left(f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right)$$

   Or f est convexe donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1\right) \leq \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$, d'où

   $$\forall x \in [0,1], B_2(f)''(x) \geq 0$$

   Ce qui montre bien que $B_2(f)$ est convexe.
3. Pour $n \geq 3$: On a

   $$B_n(f)'' = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B''_{n,k}$$

   Soit $x \in [0,1]$ et $k \in [\![2, n-2]\!]$.
   Or $B'_{n,k}(x) = n(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x))$, donc

   $$B''_{n,k}(x) = n(B'_{n-1,k-1}(x) - B'_{n-1,k}(x))$$

ie

$$B''_{n,k}(x) = n(n-1)(B_{n-2,k-2}(x) - B_{n-2,k-1}(x) - B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x))$$

ie

$$B''_{n,k}(x) = n(n-1)(B_{n-2,k-2}(x) - 2B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x))$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} B_n(f)''(x) &= f(0)B''_{n,0}(x) + f\left(\tfrac{1}{n}\right)B''_{n,1}(x) \\ &\quad + n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2} f\left(\tfrac{k}{n}\right)(B_{n-2,k-2}(x) - 2B_{n-2,k-1}(x) + B_{n-2,k}(x)) \\ &\quad + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right)B''_{n,n-1}(x) + f(1)B''_{n,n}(x) \end{aligned}$$

Or $B'_{n,0}(x) = -n(1-x)^{n-1} = -nB_{n-1,0}(x)$, donc

$$B''_{n,0}(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} = n(n-1)B_{n-2,0}(x)$$

De plus $B'_{n,1}(x) = n(B_{n-1,0}(x) - B_{n-1,1}(x))$, donc

$$B''_{n,1}(x) = n\left(B'_{n-1,0}(x) - B'_{n-1,1}(x)\right) = n\left(-(n-1)B_{n-2,0}(x) - (n-1)(B_{n-2,0}(x) - B_{n-2,1}(x))\right)$$

ie

$$B''_{n,1}(x) = n(n-1)\left(B_{n-2,1}(x) - 2B_{n-2,0}(x)\right)$$

Puis, en notant s la somme apparaissant,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=0}^{n-4} f\left(\tfrac{k+2}{n}\right)B_{n-2,k}(x) - 2\sum_{k=1}^{n-3} f\left(\tfrac{k+1}{n}\right)B_{n-2,k}(x) + \sum_{k=2}^{n-2} f\left(\tfrac{k}{n}\right)B_{n-2,k}(x) \\ &= f\left(\tfrac{2}{n}\right)B_{n-2,0}(x) + f\left(\tfrac{3}{n}\right)B_{n-2,1}(x) - 2f\left(\tfrac{2}{n}\right)B_{n-2,1}(x) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-4}\left(f\left(\tfrac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) + f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \\ &\quad - 2f\left(\tfrac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-3}(x) + f\left(\tfrac{n-3}{n}\right)B_{n-2,n-3} + f\left(\tfrac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-2}(x) \end{aligned}$$

Ensuite $B'_{n,n-1}(x) = n(B_{n-1,n-2}(x) - B_{n-1,n-1}(x))$, donc

$$B''_{n,n-1}(x) = n\left(B'_{n-1,n-2}(x) - B'_{n-1,n-1}(x)\right) = n(n-1)\left(B_{n-2,n-3}(x) - 2B_{n-2,n-2}(x)\right)$$

Et comme $B'_{n,n}(x) = nB_{n-1,n-1}(x)$,

$$B''_{n,n}(x) = n(n-1)B_{n-2,n-2}(x)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n(n-1)}B_n(f)''(x) &= f(0)B_{n-2,0}(x) + f\left(\tfrac{1}{n}\right)(B_{n-2,1}(x) - 2B_{n-2,0}(x)) \\ &\quad + f\left(\tfrac{2}{n}\right)B_{n-2,0}(x) + f\left(\tfrac{3}{n}\right)B_{n-2,1}(x) - 2f\left(\tfrac{2}{n}\right)B_{n-2,1}(x) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-4}\left(f\left(\tfrac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) + f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \\ &\quad - 2f\left(\tfrac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-3}(x) + f\left(\tfrac{n-3}{n}\right)B_{n-2,n-3} + f\left(\tfrac{n-2}{n}\right)B_{n-2,n-2}(x) \\ &\quad + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right)(B_{n-2,n-3}(x) - 2B_{n-2,n-2}(x)) + f(1)B_{n-2,n-2}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\left(f\left(\tfrac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) + f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}(x) \end{aligned}$$

Or f est convexe, donc

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{k+2}{n} + \frac{1}{2}\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k+2}{n}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Par conséquent $B_n''(f)(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, ce qui montre que $B_n(f)$ est convexe.

□

Exercice. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$ alors $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$
2. Est ce que ce résultat est encore vrai avec $[1,+\infty[$ plutôt que $]0,1[$?

Démonstration.

1. On suppose $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$.
   Alors
   $$\int_0^1 |f(t)|dt = \int_{t\in[0,1],|f(t)|\leq 1} |f(t)|dt + \int_{t\in[0,1],|f(t)|>1} |f(t)|dt \leq 1 + \int_0^1 f(t)^2 dt < +\infty$$
2. Ce résultat n'est plus vérifié : On peut considérer $f : x \in [1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{x}$.
   Alors $\int_1^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty$ mais $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$.

□

Exercice. Soit $f \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ intégrable.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par intégration par parties, on a
   $$\int_0^A f(t)cos(xt)dt = f(A)\frac{sin(xA)}{x} - \int_0^A f'(t)\frac{sin(xt)}{x}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Or f est intégrable, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$\int_A^{+\infty} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi
   $$\left|\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt\right| \leq \left|\int_0^A f(t)cos(xt)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$
   Or, d'après la question précédente, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$\forall x \geq x_0, \left|\int_0^A f(t)cos(xt)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Puis

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt\right| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\square$