Question de cours. * Enoncer le théorème de convergence dominée.

Réponse. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

1. Pour tout $x \in I$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Il existe $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors $\int_I f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)dx$.

Exercice. ** On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est antisymétrique.
2. Toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont de norme constante.

Démonstration.
Sens direct : On suppose que A est antisymétrique. Soit X solution de $X'(t) = AX(t)$. On considère $y(t) = \|X(t)\|^2 = {}^tX(t)X(t)$. Alors

$$y'(t) = {}^tX'(t)X(t) + {}^tX(t)X'(t) = {}^tX(t)\underbrace{{}^tA}_{=-A}X(t) + {}^tX(t)AX(t) = 0.$$

Donc y est constant i.e. X est de norme constante.
Sens indirect : On suppose que toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ soient de norme constante. Ainsi, pour toute solution X, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 = y'(t) = {}^tX(t)(A + {}^tA)X(t).$$

En particulier, en $t = 0$, on a

$$0 = {}^tX(0)(A + {}^tA)X(0).$$

Or $A + {}^tA$ est symétrique, donc, par théorème spectral, diagonalisable (dans une base orthonormée). Soit $\lambda \in Sp(A + {}^tA)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ vecteur propre de $A + {}^tA$ associé à la valeur propre λ. On considère X solution de $X'(t) = AX(t)$ telle que $X(0) = v$. Ainsi

$$0 = {}^tv(A + {}^tA)v = \lambda \|v\|^2.$$

D'où $\lambda = 0$ puis $A + {}^tA = 0$ i.e. ${}^tA = -A$, i.e. A est antisymétrique. $\square$

Exercice. ** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, par changement de variable linéaire $ux = t$ (licite car $x \neq 0$)

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = x \int_0^1 f'(ux)du$$

Ainsi

$$g(x) = \int_0^1 f'(ux)du$$

De même en $x = 0$, on a

$$g(0) = f'(0) = \int_0^1 f'(0)du.$$

Donc

$$g = \int_0^1 f(u \times \cdot)du$$

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (dont les hypothèses sont facilement vérifiables sur le segment $[0, 1]$), on a g de classe C^∞. $\square$

Exercice. ** Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right.$

Démonstration. On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors le système différentiel se réécrit

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Or le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-2)(X-3)$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres 2 et 3. Des vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $Y = P^{-1}X$. Alors l'équation différentielle se réécrit

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t).$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) & = & 3y_2(t) + e^{3t}. \end{array} \right.$$

Ainsi les solutions de $Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t)$ sont exactement de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ \mu e^{3t} + te^{3t} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t}+4\mu e^{3t}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}+4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t}-4\mu e^{3t}-2t-1-4te^{3t} \end{array}\right. , \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

$\square$

Exercice. *** Pour $x\in\,]1,+\infty[$, on considère $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{it^x}dt$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Etudier la continuité de f.

Démonstration.

1. L'intégrale ne peut pas être absolument convergence car l'intégrant est de module 1 non intégrable.

   On considère, pour $x>1$ et $X\geq 1$, $I_X=\displaystyle\int_1^X e^{it^x}dt$. On effectue le changement de variable $u=t^x$ ($du=xt^{x-1}dt=\frac{x}{t}udt=\frac{xu}{u^{\frac{1}{x}}}dt$) :

$$I_X=\int_1^{X^x} e^{iu}\frac{du}{xu^{1-\frac{1}{x}}}.$$

   Notons également $J_v=\displaystyle\int_1^v \frac{e^{iu}}{u^{1-\frac{1}{x}}}du$. Alors, par intégration par parties,

$$J_v=\left[\frac{e^{iu}}{iu^{1-\frac{1}{x}}}\right]_1^v+\int_1^v\frac{e^{iu}}{i}\frac{1-\frac{1}{x}}{u^{2-\frac{1}{x}}}du \underset{v\to+\infty}{\longrightarrow} 0-\frac{e^i}{i}+\frac{1-\frac{1}{x}}{i}\int_1^{\infty}\frac{e^{iu}}{u^{2-\frac{1}{x}}}du\in\mathbb{C}.$$

   Ainsi

$$f(x)=\lim_{X\to+\infty} I_X=\frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{u^{1-\frac{1}{x}}}du=\frac{1}{x}\lim_{v\to+\infty} J_v\in\mathbb{C}.$$

2. Or, d'après le calcul précédent,

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(ie^i-i\left(1-\frac{1}{x}\right)\int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{u^{2-\frac{1}{x}}}du\right).$$

   Il reste donc à vérifier la continuité de l'intégrale à paramètre. En effet, l'application $(u,x)\in[1,+\infty[\,\times\,]1,+\infty[\,\longmapsto \frac{e^{iu}}{u^{2-\frac{1}{x}}}$ est continue et pour tout $[x_0,+\infty[\,\subset\,]1,+\infty[$, pour tout $x\geq x_0$,

$$\forall u\in[1,+\infty[, \left|\frac{e^{iu}}{u^{2-\frac{1}{x}}}\right|\leq\frac{1}{u^{2-\frac{1}{x_0}}}\in L^1([1,+\infty[).$$

   Par conséquent, d'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, f est continue sur $]1,+\infty[$.

$\square$

Question de cours. * Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Réponse. Soit : $I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

1. Pour tout $x \in J$, $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable (ou continue par morceaux) sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est de classe C^1 sur J.
3. Il existe $g \in L^1(I)$ positive tel que

$$\forall t \in I, \forall x \in J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t).$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(t,x)dt$ est de classe C^1 sur J et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Exercice. * Soit I intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $F : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Démonstration. Soit $x \in I$ tel que $v(x) - u(x) \neq 0$. Alors on effectue le changement de variable affine $t = u(x) + s(v(x) - u(x))$ $(dt = (v(x) - u(x))ds)$ pour obtenir

$$F(x) = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + s(v(x) - u(x)))ds.$$

De plus cette égalité est également vérifiée si $v(x) - u(x) = 0$.
On considère $G(x,s) = f(x, u(x) + s(v(x) - u(x)))$. Alors G est continue sur $I \times [0,1]$ et pour tout compact $C \subset I$,

$$\forall x \in C, \forall s \in [0,1], |G(x,s)| \leq M \in L^1([0,1]).$$

où l'existence de $M \in \mathbb{R}_+^*$ est assuré par la continuité de $(x,s) \longmapsto f(x, u(x)+s(v(x)-u(x)))$ sur le compact $C \times [0,1]$.
Par conséquent, d'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, F est continue sur I. □

Exercice. ** Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que les solutions de $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Démonstration. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable. Donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP = T$ avec T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Ainsi l'équation différentielle se réécrit $Y'(t) = TY(t)$ avec $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Distinguons ensuite les deux cas possibles pour T :

1. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ sont exactement de la forme
$$Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\mu t} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}.$$
Ainsi les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$.
2. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ vérifient
$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda y_2(t), \end{cases}$$
i.e.
$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2(t) &= be^{\lambda t} \end{cases}, b \in \mathbb{C},$$
i.e.
$$\begin{cases} y_1(t) &= ae^{\lambda t} + \mu bte^{\lambda t} \\ y_2(t) &= be^{\lambda t} \end{cases}, a, b \in \mathbb{C}.$$
Ainsi les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$.

Par conséquent, comme les normes sont équivalentes sur $\mathbb{C}^2$, les solutions de $X'(t) = AX(t)$ tendent vers en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$. □

Exercice. * On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Démonstration.

1. On considère $g(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors g est continue,
$$g(x,t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
Donc $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1]$.
Si $x \leq 0$ alors
$$g(x,t) \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$
Donc $g(x,\cdot)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
Si $x > 0$ alors
$$g(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
Donc $g(x,\cdot)$ est intégrbale sur $[1,+\infty[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2+t}} = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}.$$
Donc pour tout $[a,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a,+\infty[$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta} \in L^1(]0,+\infty[).$$
Par conséquent, par théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}dt.$$
□

Exercice. ** Déterminer les solutions réelles du système différentielle $X'(t) = AX(t)$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est
$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)^2(X-2) + X - 1 - 1 = ((X-1)^2+1)(X-2).$$
Donc les valeurs propres de A sont $2, 1+i, 1-i$ distinctes. Ainsi A est $\mathbb{C}$-diagonalisable. Un vecteur propre associé à 2 est $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis $A-(1+i)I_3 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Donc un vecteur propre associé à $1+i$ est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$, puis un vecteur propre associé à $1-i$ est donc $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$.

Par conséquent des solutions réelles indépendantes sont
$$e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Re\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, Im\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$
Donc les solutions sont exactement de la forme
$$X(t) = ae^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + ce^t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$
□

Question de cours. ** Enoncer et démontrer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Réponse. Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

1. Pour tout $x \in J$, $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable (ou continue par morceaux) sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est continue sur J.
3. Il existe $g \in L^1(I)$ positive tel que

$$\forall t \in I, \forall x \in J, |f(t,x)| \leq g(t)$$

   (ou une domination sur tout compact)

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(t,x)dt$ est continue sur J.

Démonstration. Soit $x \in J$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
On considère alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, f_n(t) := f(t, x_n)$$

On a alors par théorème de convergence dominée

$$F(x_n) = \int_I f(t,x_n)dt = \int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t,x)dt = F(x)$$

D'où, par caractérisation séquentielle de la continuité, F est continue en x, d'où sur J. $\square$

Exercice. ** On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. Calculer sa transformée de Fourier F_α définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F(G_\alpha)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Réponse. On a

$$F(G_\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

Démonstration. Vérifions le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on note

$$f(x,\xi) = e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}.$$

Alors :

1. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,\xi)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi) = -ixe^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$$

3. On a

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi) \right| \leq |x| e^{-\alpha x^2} =: \varphi(x)$$

   avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $F(G_\alpha)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx$$

Puis par intégration par parties

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)'(\xi) = i \left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2\alpha} F(G_\alpha)(\xi)$$

D'où, par résolution de l'équation différentielle,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(G_\alpha)(\xi) = F(G_\alpha)(0) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$$

□

Exercice. ** Résoudre le système différentel $\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{array} \right.$

Démonstration. On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Alors le système se réécrit

$$X'(t) = AX(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or la polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X+1 & 1 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & X+1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)((X+1)(X-2)+2) - 2 + X + 1 = (X-2)(X^2 - X) + X - 1$$
$$= ((X-2)X+1)(X-1) = (X^2 - 2X + 1)(X-1) = (X-1)^3.$$

Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = I_3$, d'où $N = A - I_3$ est nilpotente. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \exp(tI_3)\exp(tN) = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2 N^2}{2} \right).$$

Donc, après calculs,

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2 - 2t + 1 & t^2 - t \\ -t & -t^2 + 2t & -t^2 + t + 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les solutions de $X' = AX$ sont exactement de la forme

$$X(t) = \exp(tA)X_0, X_0 \in \mathbb{R}^3,$$

puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(t) & = & e^t(a(t+1) + bt^2 + c(t^2+t)) \\ x_2(t) & = & e^t(at + b(t^2 - 2t + 1) + c(t^2 - t)) \\ x_3(t) & = & e^t(-at + b(-t^2 + 2t) + c(-t^2 + t + 1)) \end{array} \right. , a, b, c \in \mathbb{R}$$

□

Exercice. ** Montrer que $f : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ (prolongée par 0 en 0) n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Démonstration. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on peut montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une fonction polynômiale P_n tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Ainsi

$$f^{(n)}(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose par l'absurde que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Alors f et la fonction nulle vérifient le même problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y^{(n)}(0) = ... = y'(0) = y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Donc, par unicité dans le théorème de Cauchy, on en déduit que $f = 0$ ce qui n'est pas. Par conséquent f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène. □