Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Le démontrer.

Exercice. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice. On considère $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$ et pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) := |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Montrer que N est une application à valeurs dans $\mathbb{N}$ et multiplicative.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
4. Montrer que N est un stathme sur $\mathbb{Z}[i]$, ie une application de $\mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $w \in \mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z = qw + r$ et $N(r) < N(w)$ ou $r = 0$.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A et B deux polynômes à coefficients dans K, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Pour K un corps, de quelle forme sont les idéaux de $K[X]$? Le démontrer.

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice. Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. Soit $x \in G$, montrer que x est d'ordre fini.
2. Montrer que G est fini.
   Indication : Considérer E l'ensemble des sous-groupes de G et F l'ensemble des sous-groupes monogènes de G.

Exercice. On considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(u_i)_{i\in I} \in (L(E))^I$ diagonalisbles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les u_i commutent deux à deux.
2. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour les u_i.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Exercice. Soit G un groupe abélien fini (dont la loi est notée multiplicativement).

1. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b premiers entre eux, montrer que xy est d'ordre ab.
2. Soit $x, y \in G$ d'ordres respectifs a, b, montrer que xy est d'ordre $\mathrm{ppcm}(a, b)$.
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que l'ordre de z soit le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G.
4. En déduire que pour K un corps et G un sous-groupe fini de $K^{\times}$, G est cyclique.

Exercice. On dit qu'un anneau A est principal si pour tout idéal I de A, il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.
Citer deux anneaux principaux.
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche