Question de cours. Donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire en fonction de sa fonction génératrice. Le démontrer.

Exercice. Soit $a, t \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer qu'on a
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer qu'on a
$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$
3. En déduire
$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0, 1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$
2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que
$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$
3. Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq U \leq K$.

1. Exprimer $\sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(U \geq j)$ en fonction de $\mathbb{E}(U)$.
2. Calculer de même $\sum_{j=1}^{K} j^2 \mathbb{P}(U \geq j)$ en fonction de $\mathbb{E}(U), \mathbb{E}(U^2)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.

Exercice. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire entière positive indépendante des précédentes. On considère la variable $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$.

Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n.

Exercice. Soit X_n, Y_n deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. On considère les variables aléatoires Z_n et T_n définies par

$$Z_n = |X_n - Y_n|, T_n = \min(X_n, Y_n).$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(Z_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Exercice. Soit U, V deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(U=-2)=\frac{1}{3}, \mathbb{P}(U=1)=\frac{2}{3}, \mathbb{P}(V=1)=\frac{1}{2}, \mathbb{P}(V=2)=\frac{1}{2}.$$

On définit

$$W=(-1)^{V} U.$$

1. Déterminer la covariance de V et W.
2. Montrer que V^2 et W^2 sont indépendantes.
3. Déterminer $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{V=1\}} W^3\right)$.
4. En déduire que V et W ne sont pas indépendants.

Exercice. Soit $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p+q+r=1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_n=(U_n, V_n)$ un vecteur aléatoire à la valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi trinomiale i.e. pour tout $k, l \in \mathbb{N}^2$ tel que $k+l \leq n$,

$$\mathbb{P}(Y_n=(k, l))=\frac{n!}{k!l!(n-(k+l))!} p^k q^l r^{n-(k+l)}.$$

On note également $Y_0=(0,0)$.

1. Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales. Déterminer les paramètres.
2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ?
3. Démontrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}=n(x+y)^{n-1}.$$
4. En déduire $\mathbb{E}(U_n V_n)$.
5. Calculer $Cov(U_n, V_n)$ et $Var(U_n+V_n)$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 1 et $(X_{i,n})_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On considère la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Z_0=0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}.$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus d'une génération au temps n et $X_{i,n}$ le nombre d'individus engendrés par le i-ème individu à l'instant n.

1. On note G la fonction génératrice de X et, pour $n \in \mathbb{N}$, G_n celle de Z_n. Montrer que $G_{n+1}=G_n \circ G$.
2. On note $x_n=\mathbb{P}(Z_n=0)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers un réel que l'on note α. Que représente α pour le problème ?
3. Montrer que α est le plus petit point fixe de G.
4. Dans quel(s) cas a-t-on extinction presque sûr de la population ?

Exercices supplémentaires

Exercice. On considère M une matrice aléatoire à coefficients dans $\{-1, 1\}$ dont les lois des coefficiens sont indépendantes et uniformes. Déterminer $\mathbb{E}(\det(M))$ et $\mathrm{Var}(\det(M))$.

Exercice. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On définit, pour Y une variable aléatoire supplémentaire,

$$d(X, Y) = \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1).$$

1. Montrer que d est une distance sur l'espaces des variables aléatoires.
2. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} X$ si et seulement si $d(X_n, X) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.