Question de cours. Enoncer une caractérisation de la diagonalisabilité en termes de sous-espaces propres.

Exercice. On considère

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$. Montrer que les assertions suivantes suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ soit inversible.
2. $E = ker(u) \oplus Im(u)$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème du rang et une caractérisation de la bijectivité d'un endomorphisme.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $F \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de F.
3. Déterminer les suites de F telles que $u_0 = 1, u_1 = -2$.

Exercice. On considère $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques (ie ${}^tA = A$) et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (ie ${}^tA = -A$).

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $S_3(\mathbb{R})$ et de $A_3(\mathbb{R})$.
3. Faire de même pour $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
5. L'égalité précédente est-elle encore vraie pour $M_n(\mathbb{K})$ avec K un corps quelconque ?

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de la base adaptée/incomplète.

Exercice. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.

1. Montrer que $f \in End(M_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Exercice. Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(E, G)$.
   Montrer qu'il existe $h \in L(F, G)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $ker(f) \subset ker(g)$.
2. Soit $g \in L(E, G)$ et $h \in L(F, G)$.
   Montrer qu'il existe $f \in L(E, F)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $Im(g) \subset Im(h)$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche