Question de cours. Enoncer le théorème de dérivation d'une limite de fonctions.

Exercice. Soit E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. On définit la transposée de f par

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} $$

1. Montrer que ${}^t f \in L(F^*, E^*)$.
2. Vérifier les relations suivantes :
   (a) Soit $g \in L(E,F)$, ${}^t(f+g) =^t f +^t g$.
   (b) Soit $\lambda \in K$, ${}^t(\lambda f) = \lambda({}^t f)$.
   (c) Soit $g \in L(F,E)$, ${}^t(f \circ g) = \ {}^t g \circ \ {}^t f$.
   (d) ${}^t({}^t f) = f$ en utilisant l'identification par isomorphisme canoncique $E \simeq E^* *$.
   (e) Si f est bijective alors ${}^t f$ est aussi bijective et ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.
3. On suppose E et F de dimension finie. Soit b une base de E et b' une base de F, b^* la base duale de b et b'^* la base duale de b'. Montrer que

$$ Mat_{b'^*, b^*}({}^t f) = \ {}^t Mat_{b,b'}(f) $$

Exercice. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et toutes k-lipschiziennes, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la convergence est uniforme.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème d'interversion des limites (ou de la double limite).

Exercice. Montrer que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ avec

$$ \forall x \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3 $$

Déterminer la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercice. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & si \quad x \in [0,n] \\ 0 & si \quad x > n \end{cases} $$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E et E^* sont isomorphes.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Déterminer la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Etudier la dérivabilité de la limite.
3. Que peut-on en conclure grâce au théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions ?

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0, 1[$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1 - z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément dans le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche