Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la fonction f est constante,
2. la fonction f n'est pas constante,
3. la fonction f s'annule,
4. la fonction f est périodique.

Correction.

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C,$
   ou $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = f(y),$
2. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) \neq f(y),$
3. $\exists c \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0,$
4. $\exists T \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$

Exercice (Ensembles)**.** On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3), \quad t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Correction. Soit $(x, y) \in A$. Alors $4x - y = 1$. S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ alors $t = x - 1$. On vérifie que $t = x - 1$ satisfait bien $4t + 3 = 4x - 4 + 3 = 4x - 1 = y$. Donc $(x, y) \in B$. Réciproquement soit $t \in \mathbb{R}$ et $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$. Alors $4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$. Donc $(x, y) \in A$.

Exercice (Réels et complexes)**.** On considère $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Montrer que

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow \frac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}.$$

Correction. On suppose que $|z| = 1$. Alors l'écriture exponentielle de z s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\theta \neq 0$ car $z \neq 1$. Ainsi

$$\frac{1 + z}{1 - z} = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \in i\mathbb{R}.$$

Réciproquement on suppose que $\frac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1 + z}{1 - z} = ia$, i.e.

$$1 + z = ia(1 - z) = ia - iaz,$$

i.e.

$$z = \frac{ia - 1}{ia + 1}.$$

Donc

$$|z| = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la deuxième inégalité triangulaire à partir de la première.

Exercice (Ensembles)**.** On considère $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$. Peut-on écrire la partie D comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$?

Correction. On suppose par l'absurde qu'il existe $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $D = A \times B$. Nous avons $(1,0), (0,1) \in D = A \times B$, donc $1 \in A$ et $1 \in B$, ainsi $(1,1) \in A \times B = D$ ce qui absudre car $1^2 + 1^2 = 2 > 1$.

Exercice (Réels et complexes)**.** Résoudre l'équation complexe $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant l'équation. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. De plus nous pouvons écrire $3\sqrt{3} - 3i$ sous forme exponentielle :

$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6.$$

Ainsi

$$3\sqrt{3} - 3i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc

$$6e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^z = e^a e^{ib},$$

i.e.

$$a = \ln(6), \quad b = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement on vérifie que tous les $z = \ln(6) + i\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ satisfont l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Enoncer en langage courant les assertions suivantes et pour chacune donner une fonction qui la vérifie et une qui ne la vérifie pas si possible.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad f(x) < f(y)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists T \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + T)$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists T \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = f(x + T)$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$.

Correction.

1. La fonction f n'admet de maximum. La fonction $f = id_{\mathbb{R}}$ vérifie cette assertion mais pas la fonction sinus.
2. La fonction f est quelconque car nous avons
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + 0).$$
3. Les valeurs prises par la fonction f sont au moins atteintes en deux antécédents. La fonction sinus vérifie cette assertion mais pas la fonction $id_{\mathbb{R}}$.
4. Aucune fonction ne peut vérifier cette assertion car un élément x n'a qu'une seule image par la fonction f.

Question de cours. Quelles sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$? Le démontrer.

Exercice (Réels et complexes)**.** On considère $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Correction. Nous avons

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= 2(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) \\
&= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).
\end{aligned}$$

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Enoncer en langage courant les assertions suivantes puis écrire la négation en quantificateurs.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0,$
2. $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M,$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0,$
4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

Correction.

1. La fonction f ne s'annule pas. La négation est
$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$
2. La fonction diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, La négation est
$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists x \geq A, \quad f(x) \leq M.$$
3. L'assertion est équivalente à
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Longrightarrow f(x) \leq 0.$$
Ainsi, en langage courant, la fonction est négative sur $\mathbb{R}_+^*$. La négation est
$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x > 0, f(x) > 0.$$

Exercice (Ensembles)**.** Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit la fonction de Dirac (ou fonction caractéristique) $\delta_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de la partie A par

$$\forall x \in E, \quad \delta_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si} x \notin A \end{array} \right. .$$

On considère également $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions de Dirac d'ensembles que l'on déterminera.

1. $1 - \delta_A,$
2. $\delta_A \times \delta_B,$
3. $\delta_A + \delta_B - \delta_A \times \delta_B.$

Correction.

1. Nous avons $1 - \delta_A = \delta_{A^c}$ car, pour $x \in E$, si $x \in A$ alors $1 - \delta_A(x) = 0 = \delta_{A^c}(x)$, et si $x \notin A$ alors $1 - \delta_A(x) = 1 = \delta_{A^c}(x)$.
2. Nous avons $\delta_A \times \delta_B = \delta_{A \cap B}$ car, pour $x \in E$, si $x \in A \cap B$ alors $\delta_A(x) \times \delta_B(x) = 1 = \delta_{A \cap B}(x)$, et si $x \notin A \cap B$ alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, d'où $\delta_A(x) \times \delta_B(x) = 0 = \delta_{A \cap B}(x)$.
3. Nous avons $\delta_A + \delta_B - \delta_A\delta_B = \delta_{A \cup B}$ car, pour $x \in E$,
   (a) si $x \in A$ et $x \in B$ alors $\delta_A(x) + \delta_B(x) - \delta_A(x) \times \delta_B(x) = 1 = \delta_{A \cup B}(x)$,
   (b) si $x \in A$ et $x \notin B$ alors $\delta_A(x) + \delta_B(x) - \delta_A(x) \times \delta_B(x) = 1 = \delta_{A \cup B}(x)$,
   (c) par symétrie nous avons la même égalité si $x \notin A$ et $x \in B$,
   (d) si $x \notin A$ et $x \notin B$ alors $\delta_A(x) + \delta_B(x) - \delta_A(x) \times \delta_B(x) = 0 = \delta_{A \cup B}(x)$.