Question de cours. Enoncer et démontrer l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice (Sommes et produits)**.** Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Calculer $(1+i)^{4n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2p}$ et $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2p+1}$.

Exercice (Sommes doubles)**.** Calculer la somme $\sum_{1 \leq i,j \leq n} 1$.

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-i)x & - & y & + & z & = & 2-i \\ ix & + & (1+i)y & - & iz & = & -1-i \\ x & + & (1-i)y & + & z & = & 1+i \end{array} \right. , \quad (x,y,z) \in \mathbb{C}^3.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice (Sommes et produits)**.** Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Déterminer une expression simplifiée de la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}$.

Exercice (Sommes doubles)**.** Calculer les sommes $\sum_{1 \leq i,j \leq n} j$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$.

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire suivant en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array} \right. , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule du binôme.

Exercice (Sommes et produits)**.** On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x^3.$$
2. En déduire une expression simplifié de S.

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Démontrer la formule pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice (Sommes doubles)**.** Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$. Indication : On pourra écrire k comme une somme.

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{x} & + & 3y^2 & & & = & 2 \\ \frac{3}{x} & - & 2y^2 & - & \frac{1}{z^2} & = & 5 \\ & - & y^2 & + & \frac{1}{z^2} & = & 1 \end{array} \right. , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :
https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html