

Question de cours (Question de cours). Montrer l'assertion suivante

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad \exp(i(\theta + \theta')) = \exp(i\theta) \times \exp(i\theta').$$

Exercice (Géométrie). On considère la similitude directe du plan de centre 0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Ecrire la fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondante.
2. Soit $z_0 = 1$. Représenter sur le plan complexe les points z_0 et

$$z_n = f(z_{n-1})$$

pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. Déterminer la longueur de la courbe brisée formée par les points $z_0, \dots, z_n, \dots, z_\infty$.

Exercice (Trigonométrie). Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\cos(2x) + \cos(x) = 0.$$

Citer deux méthodes et en détailler une.

Exercice (Complexes). On considère $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Question de cours. Donner les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le démontrer.

Exercice (Trigonométrie). Résoudre le système suivant d'inconnue $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2 \cos(x) + 3 \sin(y) = \sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ 4 \cos(x) + \sin(y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice (Complexes). Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une fonction polynomiale réelle T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

Exercice (Géométrie). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $f_1 : z \mapsto iz$,
2. $f_2 : z \mapsto z + 1 + i$,
3. $f_3 : z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

Question de cours. Donner l'expression simple de $\arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Le démontrer.

Exercice (Complexes). Résoudre l'équation complexe $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice (Géométrie). Soit $a \in \mathbb{U}$ un complexe de module 1.

1. Ecrire l'expression des solutions z_k de l'équation $z^n = a$ en fonction de l'argument du complexe a .
2. Montrer que les points d'affixe $(1 + z_k)^n$ sont alignés.

Exercice (Trigonométrie). On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(3x)(\cos(x))^3.$$

1. Etudier la parité et la périodicité de la fonction f . En déduire un intervalle d'étude suffisant.
2. Déterminer les sens de variation de la fonction f sur cet intervalle.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html>