Question de cours. Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercice. Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx.$$

Correction. Nous avons

$$I = \int_1^2 \ln'(x)(\ln(x))^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{3}{2}\ln'(x)(\ln(x))^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{2}{3}\left[(\ln(x))^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2(\ln(2))^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

De la même manière nous pouvons effectuer le changement de variable $u = \ln(x), du = \dfrac{dx}{x}$.

Exercice. Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de la fonction réelle $f : x \longmapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$.

Correction. Nous avons

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Donc le domaine de définition de la fonction f est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1, 1\}.$$

De plus par décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

Ainsi

$$\frac{(x-1)4x^2}{x^4-1} = a + \frac{(x-1)b}{x+1} + \frac{(x-1)(cx+d)}{x^2+1}, \quad \frac{(x+1)4x^2}{x^4-1} = \frac{(x+1)a}{x-1} + b + \frac{(x+1)(cx+d)}{x^2+1}.$$

Donc, en évaluant en 1 et -1,

$$a = \frac{4\times 1^2}{(1+1)(1^2+1)} = 1, \quad b = \frac{4(-1)^2}{(-1-1)((-1)^2+1)} = -1.$$

Ainsi

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)+(cx+d)(x-1)(x+1)}{x^4-1}$$

$$= \frac{cx^3+(2+d)x^2-cx-d+2}{x^4-1}.$$

Donc $c = 0, d = 2$ et

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}.$$

Par conséquent une primitive de la fonction f est donnée par

$$F : x \longmapsto \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + 2\arctan(x).$$

Exercice. Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{-x^2+2x+8} dx.$$

Correction. Nous avons, pour tout $x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$,

$$-x^2+2x+8 = -(x-1)^2+9 = 9\left(1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2\right).$$

On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x-1}{3}, du = \dfrac{dx}{3}$,

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{9\left(1-u^2\right)} 3du = 9 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2} du.$$

Puis on effectue le changement de variable $u = \sin(t), du = \cos(t)dt$,

$$I = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin(t)^2} \cos(t)dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2 dt = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos(2t))dt = \frac{9}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de changement de variable.

Exercice. Calculer par une intégration par parties l'intégrale

$$I = \int_0^1 \arctan(x)dx.$$

Correction. Nous effectuons l'intégration par parties $u = \arctan(x), v' = 1$,

$$I = [\arctan(x)x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice. Déterminer une primitive de la fonction f donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1).$$

Correction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors une primitive de la fonction f est donnée par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{x_0}^x e^t(2t^3 + 3t^2 - t + 1)dt.$$

Nous effectuons l'intégration par parties $u(t) = 2t^3 + 3t^2 - t + 1, v'(t) = e^t$,

$$F(x) = \left[e^t(2t^3 + 3t^2 - t + 1)\right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x e^t(6t^2 + 6t - 1)dt,$$

avec, par intégration par parties $u(t) = 6t^2 + 6t - 1, v'(t) = e^t$,

$$\int_{x_0}^x e^t(6t^2 + 6t - 1)dt = \left[e^t(6t^2 + 6t - 1)\right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x e^t(12t + 6)dt,$$

avec, par intégration par parties $u(t) = 12t + 6, v'(t) = e^t$,

$$\int_{x_0}^x e^t(12t - 6)dt = \left[e^t(12t + 6)\right]_{x_0}^x - 12\int_{x_0}^x e^t dt = \left[e^t(12t + 6)\right]_{x_0}^x - 12(e^x - e^{x_0}).$$

Par conséquent une primitive de la fonction f est

$$F(x) = e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1 - 6x^2 - 6x + 1 + 12x + 6 - 12) + C_0 = e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C_0.$$

<u>Variante</u> : On peut chercher une primitive de la forme

$$F(x) = e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

Exercice. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(a + b - x) = f(x).$$

1. Montrer l'égalité
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$
2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos(x)^2}dx$$

Correction.

1. Nous effectuons le changement de variable $u = a + b - x$,
$$\int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du = \int_a^b (a+b-u)f(u)du = (a+b)\int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du.$$
Donc
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

2. Nous avons bien pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\frac{\sin(\pi - x)}{1 + \cos(\pi - x)^2} = \frac{\sin(x)}{1 + (-\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)^2}.$$

Nous pouvons donc appliquer l'égalité précédente

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)^2} dx.$$

Nous effectuons ensuite le changement de variable $u = \cos(x), du = -\sin(x)dx$,

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2}(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer le lien entre deux primitives d'une même fonction.

Exercice. Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t) + t}.$$

Correction. Nous effectuons le changement de variable $u = \ln(t), t = e^u, dt = tdu = e^u du$,

$$I = \int_0^1 \frac{du}{2u+1} = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Exercice. Donner le domaine de définition et une primitive de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ a du sens si et seulement si $x \neq 1$ et $1 - x^2 > 0$, i.e. si et seulement si $x \in]-1, 1[$. Donc le domaine de définition de la fonction f est

$$\mathcal{D}_f =]-1, 1[.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Alors une primitive de la fonction f est donnée par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}.$$

On effectue le changement de variable $t = \sin(u), dt = \cos(u)du$,

$$F(x) = \int_{-\arcsin(x_0)}^{\arcsin(x)} \frac{\cos(u)}{(1-\sin(u)^2)\sqrt{1-\sin(u)^2}} du = \int_{-\arcsin(x_0)}^{\arcsin(x)} \frac{\cos(u)}{\cos(u)^2\cos(u)} du = \int_{-\arcsin(x_0)}^{\arcsin(x)} \frac{1}{\cos(u)^2} du$$

$$= \tan(\arcsin(x)) - \tan(-\arcsin(x_0)) = \frac{x}{\cos(\arcsin(x))} + \frac{x_0}{\cos(\arcsin(x_0))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

Donc, pour $x_0 = 0 \in \mathcal{D}_f$, une primitive de la fonction f est donnée par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(m, n) \in \mathbb{N}$. On considère

$$I_{m,n} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m (t-\beta)^n dt.$$

1. Déterminer une expression entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$ pour $m > 1$.
2. En déduire l'expresion de $I_{m,n}$ en fonction de m et n.

Correction.

1. On effectue l'intégration par parties $u(t) = (t-\alpha)^m, v'(t) = (t-\beta)^n$,

$$I_{m,n} = \left[(t-\alpha)^m \frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta m(t-\alpha)^{m-1} \frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1} dt = 0 - 0 - \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}.$$

2. Nous avons alors

$$I_{m,n} = -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1}\frac{m-1}{n+2} I_{m-2,n+2} = ... = (-1)^m \frac{m!n!}{(n+m)!} I_{0,n+m},$$

où les opérations successives sont justifiées par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$: pour l'initialisation

$$I_{0,n} = (-1)^0 \frac{0!n!}{n!} I_{0,n},$$

et si l'on suppose la propriété au rang m alors au rang $m+1$

$$I_{m+1,n} = -\frac{m+1}{n+1} I_{m,n+1} = -\frac{m+1}{n+1}(-1)^m \frac{m!(n+1)!}{(n+1+m)!} I_{0,n+1+m} = (-1)^{m+1}\frac{(m+1)!n!}{(n+m+1)!} I_{0,n+m+1}.$$

De plus nous avons

$$I_{0,n+m} = \int_\alpha^\beta (t-\beta)^{m+n} dt = -\frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

Par conséquent

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1}\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\alpha-\beta)^{m+n+1}.$$