Exercice (Exercice n°15)**.** On considère un espace euclidien E et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes :

1. $(F^\perp)^\perp = F$,
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}.$$

1. Peut-on cloncure sur la converge de la série $\sum u_n$ à partir de la règle de D'Alembert ?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \frac{S_1 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si la série est $\sum u_n$ est convergente alors elle converge au sens de Cesàro.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas et qu'elle converge au sens de Cesàro.

Exercice (Exercice n°12)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM.$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. L'application f est-elle surjective.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice. Déterminer un équivalent simple de la suite des restes partielles de la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in [1, +\infty[$.

Exercice. On considère $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n + n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice (Exercice n°2)**.** On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 = x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\arctan(x)).$$

Exercice. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ est une série convergente.
3. Montrer que $\sum u_n$ est une série divergente.
4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2324.html