Exercice (Exercice n°27)**.** Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n \to +\infty$ de deux manières différentes :

1. en utilisant une comparaison série-intégrale,
2. en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}, \quad n \geq 3.$$

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes, et convergeant simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice (Exercice n°29)**.** On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx$.

Exercice. On considère $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n+n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x,y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Exercice (Exercice n°30)**.**

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est continue sur $[a,b]$.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall x\in[0,1], g_n(x)=x^n$. Cette suite converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge où

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad T_n=\frac{S_1+...+S_n}{n}$$

1. Montrer que si la série est $\sum u_n$ est convergente alors elle converge au sens de Cesàro.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas et qu'elle converge au sens de Cesàro.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall z\in\mathbb{C},\quad f_n(z)=1+z+...+z^n$$

1. Soit $a\in[0,1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z)=(1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)=\{z\in\mathbb{C},|z|\leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html