Exercice (Exercice n°31)**.** On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On définit alors, pour les x tels que la série soit convergente,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la fonction est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes, et convergeant simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction. Nous avons par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [a,b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, par convergence simple, on obtient que f est k-lipschizienne. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieur ou égal à ε. Soit $x \in [a,b]$, il existe $i \in [\![1,m]\!]$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|.$$

Puis, par k-lipschiziennité,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2k|x - a_i| + |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq 2k\varepsilon + |f_n(a_i) - f(a_i)|.$$

Or pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $f_n(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a_i)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \forall n \geq N, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq 2k\varepsilon + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq (2k+1)\varepsilon$$

ce qui montre bien que la convergence est uniforme.

Exercice. On considèrela fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\varphi = |\cdot|$.

1. Montrer que la fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'expression de $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)$ en fonction de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = 1.$$
4. En déduire que le résultat est vrai pour les nombres diadiques :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, 2^k]\!], \quad \varphi\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{p}{2^k}.$$
5. On admet que les nombres diadiques forment un ensemble dense dans $[0,1]$ i.e. pour tout $x \in [0,1]$, il existe une suite de nombres diadiques $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $x_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer alors que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
6. En déduire le résultat souhaité.

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{x^2}{2^n}$$
avec $\left(\dfrac{x^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable car $\frac{1}{2} < 1$, et
$$\forall n \in -\mathbb{N}^*, \quad \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq 2^n \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{-n}}\frac{1}{4},$$
avec $\left(\dfrac{1}{2^{-n}}\dfrac{1}{4}\right)_{n\in-\mathbb{N}^*}$ sommable. Donc $\varphi(x)$ est bien défini.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, par changement d'indice,
$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi(x).$$

3. Soit $x \in [0,1]$. Alors nous avons
$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$
Or, pour $n \leq 0$, $f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) = f(2^{-n}x + 2^{-n}) = f(2^{-n}x)$ car $2^{-n} \in \mathbb{N}$ et la fonction f est 1-périodique, d'où
$$\begin{aligned}\varphi(x+1) - \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + 2\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x+1}{2^n} + \frac{-2x+1}{2} = x + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

4. On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, nous avons, pour $p = 0$, $\varphi\left(\dfrac{p}{2^k}\right) = \varphi(0) = 0 = \dfrac{p}{2^k}$. On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$. Alors, pour $p \in [\![0, 2^k]\!]$, nous avons, d'après la question 2,
$$\varphi\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\frac{p}{2^k} = \frac{p}{2^{k+1}}$$
et pour $p \in]\!]2^k, 2^{k+1}]\!]$, alors $p' = p - 2^k \in [\![1, 2^k]\!]$ et, d'après la question 3,
$$\varphi\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{p'}{2^k} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{p'}{2^k}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\frac{p' + 2^k}{2^k} = \frac{p}{2^{k+1}}.$$

5. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est continue sur $[-A, A]$ et pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{A}{2^N} \leq \frac{1}{2}$, nous avons
$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in [-A, A], \quad \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x^2}{2^n} \leq \frac{A^2}{2^n}$$
et
$$\forall n < N, \quad \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^{-n}}\frac{1}{4}$$
Or les séries $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \dfrac{A^2}{2^n}$ et $\sum\limits_{n=-\infty}^{N-1} \dfrac{1}{2^{-n}}\dfrac{1}{4}$ convergent, on en déduit que la série associée à la fonction φ est une série normalement convergente sur $[-A, A]$. Par conséquent, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier φ est continue sur $[0,1]$. Ainsi, pour $x = \lim_{m\to+\infty} x_m \in [0,1]$ limite de nombres diadiques,
$$\varphi(x) = \lim_{m\to+\infty} \varphi(x_m) = \lim_{m\to+\infty} x_m = x.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{x}{2^m} \in [0,1]$, donc

$$\varphi(x) = \varphi\left(2^m \frac{x}{2^m}\right) = 2^m \varphi\left(\frac{x}{2^m}\right) = 2^m \frac{x}{2^m} = x$$

Puis φ est une fonction paire, donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$.

Exercice (Exercice n°32)**.** On considère, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kx}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction S.
2. Etudier la continuité de la fonction S.
3. Faire de même avec son caractère C^1.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice. On considère $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n + n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x,y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. On suppose $|y| > 1$. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$
Donc :
   (a) Si $|x| \geq |y|$ alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
   (b) Si $|x| < |y|$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car
$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{x}{y}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{y}\right| < 1.$$
2. On suppose $|y| \leq 1$. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n}.$$
Donc :
   (a) Si $|x| < 1$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car
$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n}, \quad |x| < 1.$$
   (b) Si $|x| > 1$ alors $|x| > |y|$. Ainsi la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente comme précédemment.
   (c) Si $x = 1$ alors, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.
   (d) Si $x = -1$ alors nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent. Autrement nous
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\dfrac{y^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
avec, par critère des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ convergente, et, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ absolument convergente. Donc la série $\sum$ est convergente.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.

2. Montrer que f est continue sur Δ.

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) Si $x < 0$ alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
   (b) Si $x \geq 0$ alors $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée tel que $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant. Donc, par critère des séries alternées, $\sum f_n(x)$ est convergente.

   Par conséquent $\Delta = \mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par critère des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

   D'où R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus tous les f_n sont continues, donc, par théorème de continuité sous le signe somme, $f = \sum f_n$ est continue.

Exercice (Exercice n°33)**.**

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de la fonction f en 0 et $+\infty$.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0, 1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z) = (1 - z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Correction.

1. Soit $z \in \overline{D}(0, a)$. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z) - f(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
car $a \in [0, 1[$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1 - z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a)$.
2. Soit $z \in D(0, 1)$, alors, d'après ce qui précède
$$f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$$
Mais, pour $x \in]-1, 1[$,
$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x|^k = \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}$$
En particulier, pour $x_m = 1 - \frac{1}{m} \in D(0, 1)$, nous avons
$$\|f - f_n\|_\infty \geq \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)} = m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
Ainsi on ne peut pas avoir convergence uniforme.

Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Correction. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f_n'(x) = -\ln(n)\frac{1}{n^x}.$$
2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum \frac{1}{n^x}$ converge comme somme de Riemann avec $x > 1$.
3. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n'(x)| = \ln(n)\frac{1}{n^x} \leq \ln(n)\frac{1}{n^a}$$
avec $\sum \ln(n)\frac{1}{n^a}$ convergente par croissance comparée.
Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, donc uniformément.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le sigme somme, la fonction $\zeta = \sum f_n$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\frac{1}{n^x}.$$