Exercice (Exercice n°23)**.**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice. Montrer qu'il existe une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, non bornée et intégrable sur $[0, +\infty[$:

$$\int_0^\infty f(x)dx < +\infty.$$

Correction. On considère les suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = n - \frac{1}{n^3}, b_n = n + \frac{1}{n^3}$$

Puis la fonction affine par morceaux et continue $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

1. $f = 0$ sur $[0, +\infty[\setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\right)$.
2. $f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.
3. f affine sur les $[a_n, n]$ et les $[n, b_n]$.

Ainsi

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

De plus la fonction f est continue et non bornée.

Exercice. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,
$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$
3. En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Correction.

1. On souhaite montrer que la suite $\left(a_n \frac{1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour les premiers termes nous avons
$$a_0 \frac{1}{4^0} = 1, \quad a_1 \frac{1}{4^1} = \frac{3}{4} < 1, \quad a_2 \frac{1}{4^2} = \frac{7}{16} < 1.$$
On montre alors par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
$$|a_n| \frac{1}{4^n} \leq 1, \quad \text{i.e.} \quad |a_n| \leq 4^n$$
Nous avons l'initialisation d'après ce qui précède. On suppose le résultat vrai aux rangs $n-1$ et $n-2$ pour $n > 3$. Alors
$$|a_n| \leq 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| \leq 3 \times 4^{n-1} + \underbrace{2}_{\leq 4} \times 4^{n-2} \leq (3+1) \times 4^{n-1} = 4^n.$$

Le principe de récurrence permet de conclure que la suite $\left(a_n \dfrac{1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1. Donc

$$R \geq \frac{1}{4}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \\ &= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n = a_0 + a_1 z + 3z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ &= a_0 + a_1 z + 3z(f(z) - a_0) - 2z^2 f(z) = 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z). \end{aligned}$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

3. Nous avons donc par décomposition en éléments simples

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-1)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{2z-1},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{2z-1} = \alpha + \frac{z-1}{2z-1}\beta, \quad \frac{1}{z-1} = \frac{2z-1}{z-1}\alpha + \beta.$$

Donc, en évaluant en $z = 1$ et $z = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -2.$$

Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n,$$

où les deux séries entières sont de rayon de convergence 1 et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$R = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

De plus nous avons montré que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) z^n.$$

Donc, par unicité d'un développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice (Exercice n°4).

1. On considère les fonctions $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h.
2. On considère la fonction $f = g \times h$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre n de la fonction f.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction $f_{p,k} : x \in]0,1] \longmapsto x^p \ln(x)^k$.

1. Montrer que la fonction $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$. On note alors $K_{p,k} = \displaystyle\int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \displaystyle\int_0^1 (x\ln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Correction.

1. La fonction $f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ et, par croissance comparée, $f_{p,k}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0,1]$. Donc la fonction $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. Nous avons
$$\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc, par intégrations par parties,
$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1}K_{p,k-1}$$
3. On montre par récurrence que
$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k}K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$
Ainsi
$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$
4. Soit $x \in]0,1]$, alors
$$x^x = e^{x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln(x))^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$
où :
   (a) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,1]$.
   (b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$.
   (c) La fonction somme $\sum f_n : x \longmapsto x^x$ est continue sur $]0,1]$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(-\ln(x))^n dx = \frac{1}{n!}(-1)^n\int_0^1 x^n(-\ln(x))^n dx = \frac{|J_n|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$
   Donc
$$\int_0^1 |f_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   D'où la série $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $x \longmapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$, la série $\sum \int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J_n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier dans les deux cas suivants le rayon de convergence de la série entière :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ quand $n \to +\infty$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique non identiquement nulle.

Correction. Dans les deux cas la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En particulier la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux cas vérifient

$$R_1, R_2 \geq 1.$$

1. Comme $l \neq 0$, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\sim} l r^n.$$

   Donc si $r > 1$ alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Par conséquent

   $$R_1 = 1.$$

2. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non identiquement nulle et périodique, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Donc la série $\sum a_n 1^n$ est grossièrement divergente. Par conséquent

   $$R_2 = 1.$$

Exercice (Exercice n°33).

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$ puis des équivalents de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Exercice. On considère une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable sur $[0, +\infty$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^A f(t) \cos(xt) dt = 0.$$
2. En déduire que
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt = 0.$$
3. Conclure que
$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt = 0,$$
ce qu'on appelle le théorème (ou lemme) de Riemann-Lebesgue.

Correction.

1. Nous avons par intégration par parties pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\int_0^A f(t) \cos(xt) dt = \left[f(t) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^A - \int_0^A f'(t) \frac{\sin(xt)}{x} dt = f(A) \frac{\sin(xA)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt,$$
avec
$$f(A) \frac{\sin(xA)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et
$$\left| \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} A \, \|f'\|_{\infty, [0,A]} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^A f(t) \cos(xt) dt = 0.$$
2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est intégrable donc
$$\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Puis, d'après la question précédente, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \geq x_0, \quad \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Donc, pour tout $x \geq x_0$,
$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| + \int_A^{\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon.$$
3. On en déduit avec le même raisonnement
$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) dt = 0.$$
Ainsi, comme la fonction f est à valeurs réelles,
$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(xt) dt + i \lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) dt = 0.$$

Exercice. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle. En déduire le développement en série entière de la fonction f et donner son rayon de convergence.

Correction. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, comme quotient et composé de telles fonctions, et pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} - arcsin(x)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1+xf(x)}{1-x^2}$$

i.e. la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0, \quad f(0) = 0$$

De plus la fonction f est développable en série entière $\sum a_n z^n$ comme quotient de telles fonctions. Or la fonction f est impaire, donc les termes d'indice pair dans son développement en série entière sont nuls. Ainsi on peut noter son développement en série entière $\sum a_n x^{2n+1}$. Puis le développement en série entière de f' est $\sum(2n+1)a_n x^{2n}$. Nous reportons ces deux séries entières dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
1 &= (1-x^2)f'(x) - xf(x) \\
&= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_n x^{2(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}2na_{n-1}x^{2n} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n - 2na_{n-1})x^{2n}.
\end{aligned}$$

On obtient par unicité des coefficients d'une série entière la relation suivante

$$a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}a_{n-2}.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puis, après calculs,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, par critère de d'Alembert, le rayon de convergence est 1.