Décompositions LU et de Cholesky

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre linéaire numérique d'Allaire et Kaber
2. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi (pas tout à fait)

Leçons.

1. 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes
2. 162 Systèmes d'équations linéaires, opérations élementaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques
3. 233 Analyse numérique matricielle, résolution approchée de systèmes linéaires, recherches d'éléments propres, exemples

Théorême. Soit $A \in M_n(K)$ dont tous les mineurs principaux $det(\Delta_n)$ sont non nuls, alors il existe un unique couple de matrices (L, U) telle que :

— L soit triangulaire inférieure avec uniquement des 1 sur la diagonale.

— U soit triangulaire supérieure.

— $A = LU$.

Démonstration.

Etape 1 : Unicité

Soit (L_1, U_1) et (L_2, U_2) deux tels couples.

Comme $det(A) = det(\Delta_n) \neq 0$, $A \in GL_n(K)$, et $U_1 = L_1^{-1}A \in GL_n(K)$.

Ainsi on a $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ qui est à la fois triangulaire inférieure de diagonale unitaire et triangulaire supérieure, d'où $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$ ie $L_1 = L_2, U_1 = U_2$ ce qui montre l'unicité.

Etape 2 : Existence

On considère la suite de matrices $(A^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ définie par $A^{(1)} = A$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], A^{(k+1)} = E^{(k)}A^{(k)}$$

Avec

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall i \in [\![k+1, n]\!], l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

Où l'on suppose que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], a_{k,k}^{(k)} \neq 0$.
Ainsi, par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ et calcul par blocs,

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k,k}^{(k)} & & \\ & & * & * & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & * & & & * \end{pmatrix}$$

En effet l'initialisation pour $k = 1$ est immédiate et si on suppose $A^{(k)}$ de cette forme pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k,k}^{(k)} & & \\ & & a_{k+1,k}^{(k)} & * & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & a_{n,k}^{(k)} & & & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k,k}^{(k)} & & \\ & & -l_{k+1,k}a_{k,k}^{(k)} + a_{k+1,k}^{(k)} & * & * \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,k}a_{k,k}^{(k)} + a_{n,k}^{(k)} & * & & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k,k}^{(k)} & & \\ & & 0 & * & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

On considère ensuite $U = A^{(n)}$, qui est triangulaire supérieure, et $L = (E^{(1)})^{-1}...(E^{(n-1)})^{-1}$, qui est triangulaire inférieure avec uniquement des 1 sur la diagonale.
De plus on a bien

$$LU = (E^{(1)})^{-1}...(E^{(n-1)})^{-1}A^{(n)} = (E^{(1)})^{-1}...(E^{(n-2)})^{-1}A^{(n-1)} = ... = (E^{(1)})^{-1}A^{(2)} = A^{(1)} = A$$

Etape 3 : Vérifier que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

On procède par récurrence forte sur $k \in [\![1, n-1]\!]$:
- Pour $k = 1$, $a_{1,1}^{[1]} = \Delta_1 \neq 0$ car le premier mineur principal de A est non nul.
- On suppose que $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a alors

$$A^{(k)} = E^{(k-1)}...E^{(1)}A$$

ie

$$\begin{pmatrix} \Delta_k & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = A = (E^{(1)})^{-1}...(E^{(k-1)})^{-1}A^{(k)} = \begin{pmatrix} L_{1,1}^{(k)} & 0 \\ L_{2,1}^{(k)} & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1}^{(k)} & A_{1,2}^{(k)} \\ A_{2,1}^{(k)} & A_{2,2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

D'où $\Delta_k = L_{1,1}^{(k)}U_{1,1}^{(k)}$ avec $L_{1,1}^{(k)}$ matrice triangulaire inférieure avec uniquement des 1 sur la diagonale et $U_{1,1}^{(k)}$ matrice triangulaire supérieure, et

$$\prod_{i=1}^{k} a_{i,i}^{(k)} = det(U_{1,1}^{(k)}) = det(L_{1,1}^{-1}\Delta_k) \neq 0$$

D'où $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$. □

Théorême. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice B triangulaire inférieure telle que :
- Les éléments de la diagonale de B soient positifs.
- $A = B^tB$.

Démonstration.
Etape 1 : Existence
Comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi tous les mineurs principaux de A sont non nuls car les Δ_k représentent le produit scalaire sur $\mathbb{R}^k$.
Donc, d'après le théorème précédent, il existe $(L, U) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ tel que L soit triangulaire inférieure avec uniquement des 1 sur la diagonale, U triangulaire supérieure et

$$A = LU$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!], \prod_{i=1}^{k} u_{i,i} = det(\Delta_k) > 0$, donc $\forall k \in [\![1, n]\!], u_{k,k} > 0$.
On considère donc

$$D := diag(\sqrt{u_{1,1}}, ..., \sqrt{u_{n,n}}), B := LD, C := D^{-1}U$$

Ainsi $BC = LU = A$.
Or A est symétrique, donc $C\ {}^tB^{-1} = B^{-1}\ {}^tC$ qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure.
De plus les coefficients diagonaux de B et C sont les mêmes, d'où, $C\ {}^tB^{-1} = B^{-1}\ {}^tC = I_n$, ie $C = {}^tB$ et $A = B\ {}^tB$.
Etape 2 : Unicité
On suppose qu'il existe deux décompositions de Cholesky :

$$A = B_1\ {}^tB_1 = B_2\ {}^tB_2$$

Donc $B_2^{-1}B_1 = {}^tB_2\ {}^tB_1^{-1}$ qui est triangulaire inférieure et supérieure donc diagonale de la forme $D = diag(d_1, ..., d_n)$.
Ainsi $B_1 = B_2D$, d'où $B_2\ {}^tB_2 = A = B_1\ {}^tB_1 = B_2D^2\ {}^tB_2$ ie $D^2 = I_n$.
Or, par hypothèse, $\forall k \in [\![1, n]\!], d_k > 0$, d'où $D = I_n$ puis $B_1 = B_2$. □