Le Mans Université | Année 2023/2024
Niveau L1
Maths 1

TD 3 : Étude de fonctions

Les questions marquées $\left(*^{AA}\right)$ sont à faire en auto-apprentissage.

Exercice 1. Pour les fonctions $f : E \to F$ suivantes, indiquer l'ensemble de départ E, l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image.

1. $f(x) = \cos(x)$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = x^2 + x - 2$
4. $f(x) = g \circ h(x)$ avec $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = \sqrt{x+1}$
5. $f(x) = g \circ h(x)$ avec $g(x) = \sqrt{x+1}$ et $h(x) = x^2 + 1$

Exercice 2. Calculer les ensembles suivants.

1. $f^{-1}(\{4\})$ pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
2. $f^{-1}(\{-1, 1\})$ pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.
3. $f^{-1}(]1, +\infty[)$ pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)^3$.
4. $f^{-1}(]-3, 5[)$ pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2$.

1. Calculer la dérivée seconde de f. Étudier le signe de f''.
2. Donner le tableau de variations de f'. Que signifie le changement de variations de f' ?
3. Indiquer Le point d'inflexion, la partie convexe et la partie concave.

Exercice 4. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

1. Montrer que f s'écrit sous la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ avec des constantes a, b, c que vous préciserez.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} - \alpha x$ pour la bonne valeur de α.
   En déduire l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.
3. Faire de même pour l'étude de l'asymptote oblique en $-\infty$.

Exercice 5. Pour les fonctions définies par les expressions ci-dessous, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation, le tableau de signe de la dérivée, le tableau de variations de la fonction et les limites associées puis tracer sa courbe.

1. $f_1(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$;
2. $f_2(x) = x\ln(x) - x$;
3. $f_3(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x+4}$;
4. $f_4(x) = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{x^2}{x+2}$;
5. $f_5(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$;
6. $\left(*^{AA}\right)$ $f_6(x) = x^3\sqrt{1-x}$.

Exercice 6. Pour les fonctions définies par les expressions ci-dessous, étudier leur parité et leur périodicité puis proposer un intervalle d'étude. Donner le tableau de variations et tracer la courbe de la fonction.

1. $f(x) = \sin(|x|)$
2. $\left(*^{AA}\right)$ $g(x) = |\sin(x)|$
3. $h(x) = \cos(x) + 2\sin(\frac{x}{2})$
4. $\left(*^{AA}\right)$ $k(x) = (\cos(x))^2$
5. $\ell(x) = (\cos(x))^2 + \cos x + 1$

Exercice 7.

1. Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = e^x - x.$$
   (a) Donner le tableau de variations de la fonction f.
   (b) Calculer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a. On notera $t_a(x)$ la fonction correspondante.
   (c) Tracer les tangentes au points d'abscisses 0, 1 et 2. (en prendra $e \approx 2,7$).
   (d) On considère la fonction $g_a(x) = f(x) - t_a(x)$.
   (e) Étudier les variations de la fonction g_a et en déduire le signe de g_a.
   (f) Conclure sur la position de la courbe de f par rapport à toutes ses tangentes.
2. $\left(*^{AA}\right)$ Refaire les questions 1a à 1f pour la fonction $f(x) = -2^x$ (on prendra $\ln 2 \approx 0,7$).

Pour aller plus loin

Exercice 8. Sans faire d'étude de fonction, tracer les courbes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x^2 - x - 2|$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$.
3. $h(x) = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$.

Exercice 9. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^{-\ln(x)}$.