Le Mans Université — Année 2023/2024

Niveau L1

Maths 1

TD 4 : Intégration

Les questions marquées $\left(*^{AA}\right)$ sont à faire en auto-apprentissage.

Notations : Soient f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$.

— Une primitive de f est une fonction qui peut se noter
$$F(x) = \int f(x)dx \text{ , } F(x) = \int^x f(t)dt \text{ ou } F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

— L'intégrale de f entre a et b est un réel qui se note : $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

La variable dans l'intégrale est appelée "variable muette" et se note avec n'importe quelle lettre mais doit être différente des bornes de l'intégrale.

Exercice 1.

Calculer les primitives suivantes :

$F_1(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}}$;

$F_2(x) = \int \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + 2\ dx$;

$\left(*^{AA}\right)$ $F_3(x) = \int \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

$F_4(x) = \int e^{3x} dx$;

$F_5(x) = \int \left(e^{\frac{x}{5}} + a^{3x}\right) dx$ pour $a > 0$;

$\left(*^{AA}\right)$ $F_6(x) = \int \sin(5x)dx$;

$F_7(x) = \int \frac{dx}{2x-3}$;

Exercice 2.

Une onde sinusoïdale est donnée par la formule :

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

où $A > 0$ est l'amplitude du signal, $\omega > 0$ la pulsation et φ la phase.

1. Indiquer une période T de ce signal.
2. Calculer la valeur moyenne du signal $U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
3. Calculer la valeur efficace du signal $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 dt}$.

Exercice 3.

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2}{x^2}$. Déterminer la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
2. Soit $f(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin(x) - \dfrac{1}{2}$. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

Exercice 4.

Calculer les intégrales définies suivantes :

$(*^{AA})$ $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx\,;$

$(*^{AA})$ $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^2 (x^3 - \sqrt[3]{x})x^2 dx\,;$

$I_3 = \displaystyle\int_1^t x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad (t > 0)\,;$

$I_4 = \displaystyle\int_2^3 2^x dx\,;$

$I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x+3} dx\,;$

$I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+3} dx.$

Exercice 5.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3-x}dx;$

$I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)dx;$

$(*^{AA})$ $I_3 = \displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx;$

$I_4 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx;$

$I_5 = \displaystyle\int_0^T t\cos(\omega t)dt;$

$(*^{AA})$ $I_6 = \displaystyle\int_0^T t^2\sin(\omega t)dt;$

$I_7 = \displaystyle\int_0^T t\cos^2(\omega t)dt.$

Exercice 6.

Calculer les primitives suivantes :

$F_1(x) = \displaystyle\int^x t\sqrt{t^2+1}dt\,;$

$F_2(x) = \displaystyle\int^x \frac{tdt}{\sqrt{2t^2+3}}\,;$

$F_3(x) = \displaystyle\int^x \frac{e^t}{e^t+1}dt\,;$

$(*^{AA})$ $F_4(x) = \displaystyle\int^x t(1+t^2)^5 dt\,;$

$F_5(x) = \displaystyle\int^x \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{2\sin(t)+1}}.$

Exercice 7.

À l'aide du changement de variable indiqué et/ou d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx$; (avec $u = x^2$)

$I_2 = \int_2^4 \frac{1}{x\ln x}dx$; (avec $u = \ln x$)

$(*^{AA})$ $I_3 = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$; (avec $u = \sqrt{1+x}$)

$I_4 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$; (avec $u = \sqrt{x}$)

$I_5 = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx$; (avec $u = \ln x$)

Exercice 8.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-12x+6}{(x+1)(x^2-x+1)(x-2)}.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur $[0,1]$.
2. Vérifier qu'il existe a, b , c et d dans $\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}.$$

3. Calculer l'intégrale de f sur $[0,1]$.

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$
2. $(*^{AA})$ $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$
3. $\int_3^4 \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}dx$
4. $\int_0^\pi \sin^3(t)dt$
5. $(*^{AA})$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)dt$
6. $\int_0^\pi \cos(x)e^x dx$
7. $\int_1^x \ln(t)dt$
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $(*^{AA})$ $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Pour réviser : Faire le QCM-calcul d'intégrales sur la page UMTICE (L1 - Calculs Mathématiques, Maths 1 et Maths 2)

Exercice 10.

CAlculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$
2. $\displaystyle\int_{1}^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx.$