Mathématiques de l'ingénieur 2 - Fiche de révisions

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

1 Pivot de Gauss

- Méthode :
  1. Triangularisation avec échange de lignes et opérations sur les lignes.
  2. Méthode de remontée.
- Compter le nombre d'opérations (soustractions, multiplications, divisions) de façon théorique et de façon pratique sur un système concret.
- Maximisation du pivot par échange de lignes dans la méthode du choix du pivot (partiel).

2 Méthode de Gauss-Jordan

- Méthode :
  1. Diagonalisation : Opérations similaires à la triangularisation dans la méthode du pivot de Gauss en effectuant également les opérations sur les lignes au dessus de la k-ième à l'étape k.
  2. Divisions des lignes par le cœfficient diagonal restant.
  3. Opérations simultanées sur la matrice identité.
- Compter le nombre d'opérations (soustractions, multiplications, divisions) de façon théorique et de façon pratique sur un système concret.
- Maximisation du pivot par échange de lignes dans la méthode du choix du pivot (partiel).

3 Factorisation LU

- Définition d'une factorisation LU.
- Hypothèse à vérifier pour admettre une factorisation LU :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) \neq 0.$$

  (ou effectuer directement la factorisation LU et conclure qu'il n'y a pas de problèmes et que la matrice admet bien une factorisation LU.)
- Méthode d'obtention de la factorisation :
  1. Effectuer la méthode du pivot de Gauss (sans échange de lignes) pour obtenir U la matrice triangulaire supérieure.
  2. Ecrire la matrice L :

$$n = 3 \quad \Longrightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}^0}{a_{11}^0} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}^0}{a_{11}^0} & \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} & 1 \end{pmatrix},$$

où on a effectué les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{a_{21}^0}{a_{11}^0} L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a_{31}^0}{a_{11}^0} L_1,$$

puis

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} L_2.$$

Autrement dit la première colonne de L est obtenu à la première étape et la seconde colonne à la seconde étape.

- Méthode de résolution associée :

  1. Vérifier que la matrice A admet une factorisation LU.
  2. Effectuer la factorisation LU de la matrice A.
  3. Résoudre le système $Ly = b$ d'inconnue y par méthode de descente.
  4. Résoudre le système $Ux = y$ d'inconnue x par méthode de remontée.

4 Factorisation de Cholesky

- Définition d'une factorisation de Cholesky.
- Hypothèse à vérifier pour admettre une factorisation de Cholesky : A symétrique ($A^T = A$) et

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0.$$

(ou effectuer directement la factorisation de Cholesky et conclure qu'il n'y a pas de problèmes et que la matrice admet bien une factorisation de Cholesky.)

- Méthode d'obtention de la factorisation :

  1. Considérer B matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs :

$$n = 3 \quad \Longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}, a > 0, c > 0, f > 0.$$

  2. Ecrire les équations liées à l'égalité

$$A = BB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix}.$$

  3. On déduit la première colonne a, b, d de la matrice B puis sa seconde colonne c, e et enfin sa troisième colonne f.

- Méthode de résolution associée :

  1. Vérifier que la matrice A admet une factorisation de Cholesky.
  2. Effectuer la factorisation de Cholesky.
  3. Résoudre le système $By = b$ d'inconnue y par méthode de descente.
  4. Résoudre le système $B^T x = y$ d'inconnue x par méthode de remontée.

- Compter le nombre d'opérations (soustractions, multiplications, divisions, racines carrées) de façon théorique et de façon pratique sur un système concret

5 Intégration numérique

- Définition d'une formule de quadrature.
- Méthode d'approximation par une formule de quadrature :
  1. Considérer une subdivision $a = x_0 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$.
  2. Relation de Chasles pour séparer l'intégrale
  $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$
  3. Changement de variable $x = x_i + th_i, dx = h_i dt$ pour se ramener à des intégrales sur $[0, 1]$
  $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 f(x_i + th_i)dt = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 g_i(t)dt.$$
  4. Approximation des intégrales sur $[0, 1]$ par la formule de quadrature donnée $\sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j)$
  $$\int_0^1 g(x)dx \simeq \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j), \quad \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{N-1} h_i \sum_{j=1}^{s} b_j g_i(c_j) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \sum_{j=1}^{s} b_j f(x_i + c_j h_i).$$
- Définition de l'ordre d'une formule de quadrature.
- Obtention de l'ordre p d'une formule de quadrature par
  $$\forall q \in \{1, ..., p\}, \quad \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{q-1} = \frac{1}{q}.$$
  (Comprendre que ces égalités viennent de l'égalité $\int_0^1 g_q(x)dx = \sum_{j=1}^{s} b_j g_q(c_j)$ pour les fonctions $g_q(t) = t^{q-1}, q \in \{1, ..., p\}$.)
- Connaitre les formules de quadratures à un nœud usuelles (formules des rectangles à gauche ou à droite, du point milieur).
- Savoir déterminer les poids inconnus $b_1, ..., b_s$ associés à des nœuds donnés $c_1, ..., c_s$ d'une formule de quadrature d'ordre $p \geq s$, par résolution du système linéaire associé.
- Connaître les nœuds des formules de Newton-Cotes. Savoir déterminer les poids associés.
- Définition d'une formule de quadrature symétrique. Savoir le montrer. Conclure qu'une formule de quadrature symétrique d'ordre impair $2m - 1$ (exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus $2m - 2$) est d'ordre pair $2m$ (exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus $2m - 1$).

6 Résolution numérique d'équations différentielles

- Méthode d'approximation de la solution y d'une équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = y_0$:
  1. Considérer une subdivision $0 = x_0 < ... < x_N = \overline{x}$ de l'intervalle considéré $[0, \overline{x}]$.
  2. Ecrire d'après l'équation différentielle
  $$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx.$$
  3. Effectuer le changement de variable $x = x_n + th_n, dx = h_n dt$
  $$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n \int_0^1 f(x_n + th_n, y(x_n + th_n))dt.$$

4. Approximer l'intégrale par la formule de quadrature considéré

$$\int_0^1 f(x_n + th_n, y(x_n + th_n))dt \simeq \sum_{j=1}^{s} b_j f(x_n + th_n, y(x_n + c_j h_n)).$$

5. Approximer $y(x_n)$ par y_n et les éventuels inconnus $y(x_n + c_j h_n)$ par une autre méthode d'approximation
$$y(x_{n+1}) \simeq y_n + \Phi_n.$$

6. En déduire l'expression de y_{n+1}
$$y_{n+1} = y_n + \Phi_n.$$

- Savoir le faire très rapidement pour la méthodes d'Euler associée à la méthode des rectangles à gauche. Utilisée très fréquemment pour les termes inconnus apparaissant

$$y(x_n + c_j h_n) \simeq y(x_n) + c_j h_n y(x_n) \simeq y_n + c_j h_n y_n.$$

- Savoir le faire rapidement pour la méthode de Runge associée à la méthode du point milieur.

7 Séries de Fourier

- Définition des cœfficients $c_n(f), a_n(f), b_n(f)$ des Fourier d'une fonction 2π-périodique.
- Calculer les cœefficients de Fourier d'une fonction donnée.
- Définition des sommes partielles et de la série de Fourier.
- Théorème de Dirichlet pour étudier la convergence de la série de Fourier et savoir quand elle est égale à la fonction f.
- Déterminer les coœfficients et la série de Fourier d'une petite modification de la fonction f

$$\overline{f}, \quad t \mapsto f(-t), \quad t \mapsto f(t+a), \quad f'.$$

8 Transformation de Fourier continue

- Définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la transformée de Fourier d'une fonction f donnée.
- Calculer la transformée de Fourier d'une petite modification de la fonction f

$$\overline{f}, \quad t \mapsto f(-t), \quad t \mapsto f(t-a), \quad t \mapsto e^{i\xi_0 t} f(t), \quad t \mapsto f(at), \quad t \mapsto af(t), \quad f'.$$

- Condition de dérivation et dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction f

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{F}(f)(\xi) = -i\mathcal{F}(tf(t))(\xi).$$

- Théorème d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathcal{F}(f)(t)dt = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)})(x)}, \quad f(-x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x).$$

- Savoir déterminer la transformée de Fourier d'une fonction g qui est elle-même la transformée de Fourier $g = \mathcal{F}(f)$ d'une fonction f.

9 Transformation de Fourier discrète

- Définition de la transformée de Fourier discrète d'une fonction 2π-périodique.
- Calculer la transformée de Fourier discrète d'une fonction donnée.