Examen

Durée 1h15

Le polycopié de cours (sans notes manuscrites) est autorisé. Tout autre document est interdit. Le barème est indicatif. Le sujet est sur deux pages.

Exercice 1 (6 points)

On considère la matrice A suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A admet une factorisation LU.
2. Déterminer les matrices L et U de la factorisation $A = LU$.
3. Retrouver le déterminant de la matrice A à partir de sa factorisation.
4. Résoudre, en utilisant cette décomposition, le système $Ax = b$ où : $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (5 points)

On considère la formule de quadrature à deux nœuds

$$T(g) = b_1 g\left(\frac{1}{3}\right) + b_2 g\left(\frac{2}{3}\right)$$

avec b_1, b_2 les poids associés aux nœuds $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ et g fonction continue sur $[0,1]$.

1. On suppose que cette formule de quadrature est d'ordre 2. Déterminer les valeurs des poids b_1 et b_2.
2. Quel est l'ordre maximal de cette formule de quadrature ?
3. En introduisant la subdivision régulière à N points de l'intervalle $[a,b]$ et une fonction f continue sur $[a,b]$, donner l'expression approchée de l'intégrale suivante par cette formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 3 (5 points)

On souhaite utiliser la formule de quadrature de l'exercice 2 pour construire une méthode d'approximation de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) & = & y^2(x) \quad x \in [0,1] \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Pour cela on choisit la subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$: $0 = x_0 < ... < x_i = \frac{i}{N} < ... < x_N = 1$ et on note $(y_0, ..., y_N)$ l'approximation ainsi construite de la solution exacte y.

1. Montrer que, en notant h le pas de la subdivision régulière précédente,

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\}, \quad y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\int_0^1 (y(x_i + ht))^2 dt.$$

2. En utilisant la formule de quadrature de l'exercice 2 et en remplaçant les termes inconnus par la méthode d'Euler, montrer que

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\}, \quad y_{i+1} = y_i + hy_i^2 + h^2 y_i^3 + \frac{5}{18}h^3 y_i^4$$

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = |x|$$

et prolongée de façon 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les cœfficients de Fourier de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier associée et en déduire qu'elle coïncide avec la fonction f.
3. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$