Calcul de Malliavin

et applications en mathématiques financières

Dorian Cacitti-Holland
Stage de M2 Mathématiques fondamentales de mars à juin 2022
supervisé par Laurent Denis et Alexandre Popier

Résumé

Le but de ce mémoire est d'introduire les notions importantes du calcul de Malliavin puis d'expliquer certaines de ses applications, notamment pour comprendre les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Dans la section 1, nous commencerons par définir la dérivée et la divergence de Malliavin. Il s'agit de deux opérateurs opérant sur des espaces de variables aléatoires, servant à généraliser le calcul des variations des fonctions déterministes aux variables aléatoires. Il y sera également développé les propriétés essentielles de ces opérateurs, comme par exemple la règle de la chaîne pour calculer la dérivée d'une composée ou la formule d'intégration par parties. Nous donnerons davantage de détails sur ces opérateurs dans le cadre $L^2([0,T])$. En effet il s'agit du cadre le plus usuel pour étudier la dérivée de Malliavin d'un processus stochastique. Ces résultats et leurs démonstrations suivent l'approche de David Nualart dans son livre [6]. Il explique également quelques utilisations du calcul de Malliavin, comme obtenir une expression simple du générateur du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, ou encore quelques applications dans un modèle financier. Ces résultats seront détaillés dans la section 2.

Historiquement, Paul Malliavin introduisa sa notion de calcul de Malliavin afin d'obtenir des critères de densité pour une variable aléatoire ou une solution d'équation différentielle stochastique. La section 3 expliquera donc qu'il existe des critères de densité, ou de densité régulière, d'une variable aléatoire. Nous obtiendrons également, sous conditions, la dérivabilité de Malliavin d'une solution d'équation différentielle ainsi qu'une équation différentielle stochastique vérifiée par la dérivée de Malliavin de celle-ci.

Pour continuer avec les équations différentielles stochastiques, nous développerons en section 4 les équations différentielles stochastiques rétrogrades, où l'on fixe la condition finale et non la condition initiale. Ces équations ne peuvent être résolues par changement de variable $t \longmapsto T - t$ comme dans le cadre déterministe car nous cherchons des solutions adaptés à une filtration, qui n'est en particulier pas stable par ce changement de variable. Pour résoudre ce type d'équation différentielle, nous avons besoin d'introduire un processus stochastique supplémentaire qui va justement servir à adapter la solution à la filtration. Le calcul de Malliavin va alors servir à comprendre ce processus comme la dérivée de Malliavin de la solution. Nous pourrons utiliser ce résultat en mathématiques financières, plus précisément dans le cadre d'une liquidation d'actifs financiers afin d'obtenir une stratégie optimale. Il s'agit d'une situation où un investisseur souhaite vendre ses actifs mais il ne doit pas le faire n'importe comment afin de limiter sa moins-value. Cette utilisation du calcul de Malliavin a été réalisée dans les articles d'Alexandre Popier [9] et de S. Ankirchner, M. Jeanblanc et T.Kruse [1].

Remerciements

J'aimerais remercier mes maîtres de stage Monsieur Denis Laurent, Professeur à l'Université du Mans et Monsieur Popier Alexandre, Maître de conférences à l'Université du Mans, de m'avoir dirigé dans mon travail pour ce stage et aussi d'avoir répondu à mes nombreuses questions.

De plus j'aimerais également remercier Monsieur Mansanarez Paul, étudiant de ma promotion, pour ses explications sur les notions que je ne connaissais pas et pour son écoute.

Table des matières

1 Introduction de la dérivée et de la divergence de Malliavin

Dans cette section, nous allons introduire les notions importantes de ce mémoire que sont la dérivée et la divergence de Malliavin. Pour se faire nous allons avoir besoin de prérequis concernant la décomposition en chaos de Wiener de variables aléatoires de carré intégrable. Nous considérons donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1 Processus isonormal et décomposition en chaos de Wiener

1.1.1 Dans le cadre général

Nous nous plaçons dans le cadre général avec H un espace de Hilbert séparable et nous allons considérer un processus stochastique avec de bonnes propriétés pour obtenir la décomposition en chaos de Wiener sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, avec $\mathcal{G}$ la tribu canoniquement associé à ce processus.

Définition 1.1.1.1. On dit qu'un processus stochastique $W = (W(h))_{h\in H}$ est un processus gaussien isonormal si W est un processus gaussien centré tel que, pour tout $h, g \in H$,

$$\mathbb{E}(W(h)W(g)) = \langle h, g\rangle_H.$$

Une première propriété d'un processus gaussien isonormal est la suivante :

Proposition 1.1.1.2. L'application

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ h & \longmapsto & W(h) \end{array}$$

est linéaire. De plus il s'agit d'une isométrie linéaire de H sur un sous-espace gaussien $W(H)$.

Démonstration.

1. <u>Linéarité</u> : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $h, g \in H$. Alors, après développement du carré et isonormalité de W,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}((W(\lambda h + \mu g) - \lambda W(h) - \mu W(g))^2) & = & \mathbb{E}(W(\lambda h + \mu g)^2) + \lambda^2\mathbb{E}(W(h)^2) + \mu^2\mathbb{E}(W(g)^2) \\ & & -2\lambda\mathbb{E}(W(\lambda h + \mu g)W(h)) - 2\mu\mathbb{E}(W(\lambda h + \mu g)W(g)) \\ & & +2\lambda\mu\mathbb{E}(W(h)W(g)) \\ & = & \|\lambda h + \mu g\|_H^2 + \lambda^2 \|h\|_H^2 + \mu^2 \|g\|_H^2 \\ & & -2\lambda\langle\lambda h + \mu g, h\rangle_H - 2\mu\langle\lambda h + \mu g, g\rangle_H \\ & & +2\lambda\mu\langle h, g\rangle_H \\ & = & \|\lambda h + \mu g\|_H^2 + \lambda^2 \|h\|_H^2 + \mu^2 \|g\|_H^2 \\ & & -2\lambda^2 \|h\|_H^2 - 2\lambda\mu\langle h, g\rangle_H - 2\lambda\mu\langle h, g\rangle_H - 2\mu^2 \|g\|_H^2 \\ & & +2\lambda\mu\langle h, g\rangle_H \\ & = & 0. \end{array}.$$

   D'où, dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$W(\lambda h + \mu g) = \lambda W(h) + \mu W(g).$$

2. <u>Sous-espace gaussien</u> : Pour tout $h \in H$, $W(h)$ est gaussien centré par hypothèse, donc $W(H)$ est un sous-espace gaussien.
3. <u>Isométrie</u> : Soit $h \in H$. Alors

$$\|W(h)\|_2^2 = \mathbb{E}(W(h)^2) = \langle h, h\rangle_H = \|h\|_H^2.$$

$\square$

Puis, pour obtenir d'autres propriétés sur le processus W, nous allons avoir besoin d'introduire les polynômes de Hermite.

Définition 1.1.1.3. Le 0-ième polynôme de Hermite est défini par $H_0(x) = 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième polynôme de Hermite est défini par

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Il s'agit bien de polynômes ce que l'on peut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.1.1.4. Soit $t, x \in \mathbb{R}$. Alors

$$F(x,t) := \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) &= \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-t)^2\right) \\
&= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n \left(e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\right)}{\partial t^n}(x,0) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x), \quad (n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x), \quad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Démonstration. Nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = tF(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n H_{n-1}(x).$$

D'où $H_n'(x) = H_{n-1}(x)$. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n H_{n+1}(x) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = (x-t)F(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n x H_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} t^n H_{n-1}(x).$$

D'où $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(-x) = F(-x,t) = F(x,-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n (-1)^n H_n(x).$$

D'où $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. □

Corollaire 1.1.1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors le terme dominant du polynôme $H_n(x)$ est $\dfrac{x^n}{n!}$. De plus

$$H_{2n+1}(0) = 0, \quad H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Démonstration. Nous avons, par développement en série entière de la fonction *exp*,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(0) = F(0,t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

D'où, par unicité d'un développement en série entière,

$$H_{2n+1}(0) = 0, \quad H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

□

Lemme 1.1.1.7. Soit (X,Y) un vecteur gaussien tel que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$. Alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \dfrac{1}{n!}(\mathbb{E}(XY))^n & \text{si} \quad n = m. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $s,t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(sX-\frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY-\frac{t^2}{2}\right)\right)=\exp\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\exp(sX+tY)\right)=\exp\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\varphi_{(X,Y)}(-is,-it).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(sX-\frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY-\frac{t^2}{2}\right)\right)=\exp\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(-is,-it)\begin{pmatrix}1 & \mathbb{E}(XY)\\ \mathbb{E}(XY) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-is\\ -it\end{pmatrix}\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left((s,t)\begin{pmatrix}s+t\mathbb{E}(XY)\\ s\mathbb{E}(XY)+t\end{pmatrix}\right)=\exp\left(-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(\frac{s^2+st\mathbb{E}(XY)+ts\mathbb{E}(XY)+t^2}{2}\right).$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(sX-\frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY-\frac{t^2}{2}\right)\right)=\exp\left(st\mathbb{E}(XY)\right).$$

Ainsi, comme $F(x,t)=\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}t^nH_n(x)$, on a, par théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre et évaluation en $(s,t)=(0,0)$, pour tout $n,m\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(n!H_n(x)m!H_m(x))=\frac{\partial^{n+m}\exp(st\mathbb{E}(XY))}{\partial s^n\partial t^m}(0,0)=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ n! & \text{si } n=m.\end{cases}$$

□

Grâce aux propriétés des polynômes de Hermite citées précédemment, nous obtenons un premier lien avec le processus gaussien isonormal. On considère $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par les $W(h)$ pour $h\in H$.

Lemme 1.1.1.8. La famille $\left(e^{W(h)}\right)_{h\in H}$ forme une famille totale de $L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$.

Démonstration. Soit $X\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ tel que

$$\forall h\in H, \mathbb{E}(Xe^{W(h)})=0.$$

Alors, par linéarité de W, pour tout $m\in\mathbb{N}^*, t_i\in\mathbb{R}, h_i\in H$,

$$\mathbb{E}\left(X\exp\left(\sum_{i=1}^m t_iW(h_i)\right)\right)=\mathbb{E}\left(X\exp\left(W\left(\sum_{i=1}^m t_ih_i\right)\right)\right)=0.$$

On considère la mesure signée ν sur $(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ définie par

$$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \nu(B)=\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B(W(h_1),...,W(h_m))).$$

Alors, d'après le calcul précédent, la transformée de Laplace de ν est donnée par, pour tout $t\in\mathbb{R}^m$,

$$L\nu(t)=\int_{\mathbb{R}^m}e^{\langle t,x\rangle}\nu(dx)=\mathbb{E}\left(X\exp\left(\sum_{i=1}^m t_iW(h_i)\right)\right)=0.$$

D'où $\nu=0$. Ainsi $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)=0$ pour tout $G\in\mathcal{G}$, d'où $X=0$.
Par conséquent

$$\{e^{W(h)}, h\in H\}^{\perp}=\{0\},$$

i.e, comme $L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ est un espace de Hilbert,

$$\overline{\{e^{W(h)}, h\in H\}}=L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}).$$

□

Nous allons donc pouvoir obtenir la décomposition en chaos de Wiener.

Définition 1.1.1.9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors le chaos de Wiener $\mathcal{H}_n$ d'ordre n est défini par

$$\mathcal{H}_n=\mathrm{Vect}\left(H_n(W(h)), h\in H, \|h\|_H=1\right).$$

De plus on note $\mathcal{H}_0$ l'ensemble des constantes.

Exemple 1.1.1.10. $\mathcal{H}_1 = \{W(h), h \in H\}$.

Proposition 1.1.1.11. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$. Alors $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ sont orthogonaux.

Démonstration. Soit $h, g \in H$ tels que $\|h\|_H = \|g\|_H = 1$. Alors $(W(h), W(g))$ est un vecteur gaussien vérifiant

$$\mathbb{E}(W(h)) = \mathbb{E}(W(g)) = 0, \quad \mathbb{E}(W(h)^2) = \mathbb{E}(W(g)^2) = \|h\|^2 = \|g\|^2 = 1.$$

Donc, d'après le lemme 1.1.7,

$$\mathbb{E}(H_n(W(h))H_m(W(g))) = 0.$$

Par conséquent les sous-espaces vectoriels engendrés $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ sont orthogonaux. □

Théorème 1.1.1.12. Nous avons la décomposition de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ suivante

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n.$$

On notera J_n la projection sur le n-ième chaos de Wiener $\mathcal{H}_n$.

Démonstration. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ orthogonal à tous les $\mathcal{H}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $h \in H$ tel que $\|h\|_H = 1$, on a

$$\mathbb{E}(XH_n(W(h))) = 0.$$

Or les polynômes de Hermite H_n forment une base algébrique de $\mathbb{R}[x]$, donc $x^n \in \mathbb{R}[x]$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire (finie) de H_k. Ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(XW(h)^n) = 0.$$

Puis, par théorème d'interversion,

$$\mathbb{E}(X \exp(tW(h))) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} X \frac{t^n}{n!} W(h)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E}(XW(th)^n) = 0.$$

D'où $X \in \{e^{W(h)}, h \in H\}^\perp = \{0\}$ d'après le lemme 1.1.8. Par conséquent

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \left(\bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n\right) \bigoplus \left(\overline{\bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n}\right)^\perp = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n.$$

□

Exemple 1.1.1.13. On considère $H = \mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$ avec ν la loi normale centrée réduite, et

$$\forall h, x \in \mathbb{R}, W(h)(x) = hx$$

Alors W est un processus gaussien centré et

$$\forall h, g \in H, \mathbb{E}_\nu(W(h)W(g)) = hg\mathbb{E}_\nu(id_{\mathbb{R}}^2) = hg.$$

Donc W est un processus gaussien isonormal. De plus

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(H_n(W(1)), H_n(W(-1))) = \mathrm{Vect}(H_n(id_{\mathbb{R}}), H_n(-id_{\mathbb{R}})) = \mathrm{Vect}(H_n).$$

Ainsi $\mathcal{H}_n$ est de dimension 1 et engendré par H_n. Par conséquent, d'après le théorème précédent, les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \nu)$.

Corollaire 1.1.1.14. En considèrant

$$\mathcal{P}_n^0 = \mathrm{Vect}\left(p(W(h_1), ..., W(h_k)), h_1, ..., h_k \in H, p \in \mathbb{R}_n[X_1, ..., X_k], k \in \mathbb{N}^*\right)$$

et $\mathcal{P}_n$ la fermeture de $\mathcal{P}_n^0$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous avons

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i = \mathcal{P}_n.$$

Nous pouvons également nous intéresser aux polynômes de Hermite généralisés afin d'obtenir une base hilbertienne $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Comme l'espace de Hilbert H est supposé séprable, on peut considèrer $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un base hilbertienne de H.

Définition 1.1.1.15. Soit $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ i.e. $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de support fini. Alors le polynôme de Hermite généralisé $H_a(x), x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est défini par

$$H_a(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(x_i).$$

Définition 1.1.1.16. Nous considérons les variables aléatoires, pour $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$,

$$\phi_a := \sqrt{a!}\prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i)),$$

où le produit est en réalité fini car $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, et

$$a! = \prod_{i=1}^{+\infty} a_i!.$$

Proposition 1.1.1.17. La famille $(\phi_a)_{a\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$ est une famille orthonormale.

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Alors, par indépendance,

$$\mathbb{E}(\phi_a\phi_b) = \sqrt{a!}\sqrt{b!}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i))H_{b_i}(W(e_i))\right) = \sqrt{a!}\sqrt{b!}\prod_{i=1}^{+\infty}\mathbb{E}(H_{a_i}(W(e_i))H_{b_i}(W(e_i))).$$

Or, si $a \neq b$ alors il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_i \neq b_i$, d'où, d'après le lemme 1.1.1.7,

$$\mathbb{E}(H_{a_i}(W(e_i))H_{b_i}(W(e_i))) = 0.$$

Ainsi, en utilisant encore le lemme 1.1.1.7,

$$\mathbb{E}(\phi_a\phi_b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq b \\ 1 & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

□

Proposition 1.1.1.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les variables aléatoires ϕ_a, $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ tel que $|a| := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = n$, forment une base hilbertienne de $\mathcal{H}_n$.

Démonstration. D'après le lemme précédent on a l'orthonormalité de la famille. De plus pour tout $h_1, ..., h_k \in H$ et $p \in \mathbb{R}_n[X_1, ..., X_k]$, la variable aléatoire $p(W(h_1), ..., W(h_n))$ peut être approché par une suite de fonctions polynomiales en les $W(e_i)$ car les e_i forment une base hilbertienne de H. On en déduit le résultat d'après le corollaire 1.1.1.14. □

Corollaire 1.1.1.19. La famille $(\phi_a)_{a\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition précédente et le théorème de décomposition en chaos de Wiener. □

1.1.2 Dans le cadre $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$

On se place dans le cadre particulier $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ avec μ une mesure σ-finie sans atomes sur l'espace mesuré $(T, \mathcal{B})$. C'est ce cas là qui va nous intéresser, le plus souvent $(T, \mathcal{B}, \mu) = ([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$ avec $T \in \mathbb{R}_+^*$ et λ la mesure de Lebesgue. La décomposition en chaos de Wiener va alors être appelé expansion en chaos de Wiener dont les termes vont être des intégrales multiples.

Définition 1.1.2.1. Bruit blanc : Le bruit blanc basé sur la mesure μ est le processus gaussien W sur $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ que l'on note $W(A) = W(\mathbb{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Remarque 1.1.2.2. Pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, $W(A) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$. De plus les variables aléatoires $W(A)$ et $W(B)$ sont indépendantes dès que $A, B \in \mathcal{B}$ sont disjoints.

Définition 1.1.2.3. On définit $\mathcal{E}_m$ l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t_1, ..., t_m) = \sum_{1 \le i_1, ..., i_m \le n} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times ... \times A_{i_m}}(t_1, ..., t_m),$$

avec $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints de mesure μ finie, et $a_{i_1,...,i_m} = 0$ dès que $i_k = i_l$.

Définition 1.1.2.4. Soit $f \in \mathcal{E}_m$ avec les notations précédentes. Alors on définit l'intégrale multiple de la fonction f par

$$I_m(f) = \sum_{1 \le i_1, ..., i_m \le n} a_{i_1,...,i_m} W(A_{i_1})...W(A_{i_m}).$$

Proposition 1.1.2.5. L'application $I_m : \mathcal{E}_m \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout $f \in \mathcal{E}_m$, $I_m(f)$ ne dépend pas de la décomposition de f dans $\mathcal{E}_m$.
2. I_m est linéaire.
3. Pour tout $f \in \mathcal{E}_m$, en notant son symétrisé

$$\tilde{f}(t_1, ..., t_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} f(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)}),$$

nous avons $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$.

4. Pour tout $f \in \mathcal{E}_m$ et $g \in \mathcal{E}_q$,

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_q(g)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq q \\ m!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle & \text{si} \quad m = q. \end{cases}$$

Démonstration.

1. Soit $f \in \mathcal{E}_m$ que l'on écrit

$$f(t_1, ..., t_m) = \sum_{1 \le i_1, ..., i_m \le n} a_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times ... \times A_{i_m}}(t_1, ..., t_m) = \sum_{1 \le i_1, ..., i_m \le n'} b_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1} \times ... \times B_{i_m}}(t_1, ..., t_m).$$

Raisonnons avec, pour tout $s, t \in T$,

$$f(s,t) = a_{1,2}\mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(s,t) + a_{2,1}\mathbb{1}_{A_2 \times A_1}(s,t) = b_{1,2}\mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(s,t) + b_{2,1}\mathbb{1}_{B_2 \times B_1}(s,t),$$

avec $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ disjoints non vides de mesure μ finie, B_1, B_2 également, et

$$a_{1,2}, a_{2,1}, b_{1,2}, b_{2,1} \neq 0.$$

Le cas général se traite de la même manière avec plus de technicité. Soit $(s,t) \in A_1 \times A_2$. Alors $s \notin A_2$ et $t \notin A_1$, d'où

$$f(s,t) = a_{1,2} = b_{1,2}\mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(s,t) + b_{2,1}\mathbb{1}_{B_2 \times B_1}(s,t).$$

De plus B_1 et B_2 sont disjoints, donc :

(a) soit $s \in B_1$ et $t \in B_2$ et alors $s \notin B_2$ et $t \notin B_1$, d'où

$$f(s,t) = a_{1,2} = b_{1,2},$$

(b) soit $s \in B_1$ et $t \notin B_2$ et alors $s \notin B_2$, d'où

$$f(s,t) = a_{1,2} = 0,$$

(c) soit $s \notin B_1$ et $t \in B_2$ et alors $t \notin B_1$, d'où

$$f(s,t) = a_{1,2} = 0,$$

(d) soit $s \notin B_1$ et $t \notin B_2$, d'où

$$f(s,t) = a_{1,2} = 0,$$

(e) de même en inversant les rôles de B_1, B_2 et de $b_{1,2}, b_{2,1}$.

Par conséquent on a soit $(s,t) \in B_1 \times B_2$ et $a_{1,2} = b_{1,2}$, soit $(s,t) \in B_2 \times B_1$ et $a_{1,2} = b_{2,1}$. On procède de même en partant de $(s,t) \in B_1 \times B_2$ pour en déduire que

$$A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2 \text{ ou } A_1 \times A_2 = B_2 \times B_1.$$

Par conséquent

$$a_{1,2}W(A_1)W(A_2) + a_{2,1}W(A_2)W(A_1) = b_{1,2}W(B_1)W(B_2) + b_{2,1}W(B_2)W(B_1),$$

ce qui montre bien que $I_2(f)$ ne dépend pas de la décomposition de f.

2. Par linéarité de la sommation, on en déduit la décomposition de $\lambda f + \mu g$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{E}^m$, puis que $I_n(\lambda f + \mu g) = \lambda I_n(f) + \mu I_n(g)$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_m$. On suppose $f = \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}}$, on en déduira le résultat souhaité par linéarité de I_m. Alors

$$\tilde{f}(t_1, ..., t_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}}(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathbb{1}_{A_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \times \ldots \times A_{i_{\sigma^{-1}(m)}}}(t_1, ..., t_m).$$

D'où, par linéarité de I_m,

$$I_m(\tilde{f}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} W(A_{i_{\sigma^{-1}(1)}})...W(A_{i_{\sigma^{-1}(m)}}).$$

Or, pour tout $\sigma \in S_m$,

$$W(A_{i_{\sigma^{-1}(1)}})...W(A_{i_{\sigma^{-1}(m)}}) = \prod_{j=1}^{m} W(A_{i_{\sigma^{-1}(m)}}) = \prod_{k=1}^{m} W(A_{i_k}) = I_m(f).$$

Donc

$$I_m(\tilde{f}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} I_m(f) = I_m(f).$$

4. Soit $f \in \mathcal{E}_m$ et $g \in \mathcal{E}_q$. Quitte à rajouter des constantes nulles on peut supposer

$$f(t_1, ..., t_m) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} a_{i_1, \ldots, i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}}(t_1, ..., t_m),$$

et

$$g(t_1, ..., t_q) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n} b_{j_1, \ldots, j_m} \mathbb{1}_{A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_q}}(t_1, ..., t_q).$$

Ainsi

$$I_m(f) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} a_{i_1, \ldots, i_m} W(A_{i_1})...W(A_{i_m}),$$

et

$$I_q(g) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n} b_{j_1, \ldots, j_q} W(A_{j_1})...W(A_{j_q}).$$

Par conséquent, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_q(g)) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n} a_{i_1, \ldots, i_m} b_{j_1, \ldots, j_m} \mathbb{E}(W(A_{i_1})...W(A_{i_m})W(A_{j_1})...W(A_{j_q})).$$

Donc, si $q > m$ alors il existe $k \in \{j_1, ..., j_q\} \backslash \{i_1, ..., i_m\}$, donc A_k est disjoint des A_l pour l dans $\{j_1, ..., j_q\} \backslash \{k\} \cup \{i_1, ..., i_m\}$. D'où

$$\mathbb{E}(W(A_{i_1})...W(A_{i_m})W(A_{j_1})...W(A_{j_q})) = 0.$$

Puis

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_q(g)) = 0.$$

De même si $q < m$. On suppose maintenant $m = q$. Alors, par le même raisonnement que précédemment,

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_m(q)) = \sum_{1\leq i_1<...<i_m<n} (m!)^2 a_{i_1,...,i_m} b_{i_1,...,i_m} \mathbb{E}(W(A_{i_1}^2))...\mathbb{E}(W(A_{i_m})^2).$$

Puis, comme $W(A_k) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A_k))$,

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_m(g)) = \sum_{1\leq i_1<...<i_m\leq n} (m!)^2 a_{i_1,...,i_m} b_{i_1,...,b_m} \mu(A_{i_1})...\mu(A_{i_m}).$$

De plus

$$\langle f, g\rangle_{L^2(T^m)} = \sum_{1\leq i_1,...,i_m\leq n} \sum_{1\leq j_1,...,j_m\leq n} a_{i_1,...,i_m} b_{j_1,...,j_m} \langle \mathbb{1}_{A_{i_1}\times...\times A_{i_m}}, \mathbb{1}_{A_{j_1}\times...\times A_{j_m}}\rangle_{L^2(T^m)},$$

avec

$$\langle \mathbb{1}_{A_{i_1}\times...\times A_{i_m}}, \mathbb{1}_{A_{j_1}\times...\times A_{j_m}}\rangle_{L^2(T^m)} = \int_{A_{i_1}\cap A_{j_1}\times...\times A_{i_m}\cap A_{j_m}} \mu^{\otimes m}(dt) = \mu^{\otimes m}(A_{i_1}\cap A_{j_1}\times...\times A_{i_m}\cap A_{j_m})$$

nul s'il existe $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $i_k \neq j_k$ car les A_l sont disjoints. Ainsi

$$\langle f, g\rangle_{L^2(T^m)} = \sum_{1\leq i_1,...,i_m\leq n} a_{i_1,...,i_m} b_{i_1,...,i_m} \mu^{\otimes m}(A_{i_1} \times ... \times A_{i_m}).$$

Or μ est sans noyau, donc si $i_k = i_l$ avec $k \neq l$ alors

$$\mu^{\otimes m}(A_{i_1} \times ... \times A_{i_m}) = 0.$$

Donc, après réarrangement,

$$\langle f, g\rangle_{L^2(T^m)} = m! \sum_{1\leq i_1<...<i_m\leq n} a_{i_1,...,i_m} b_{i_1,...,i_m} \mu(A_{i_1})...\mu(A_{i_m}).$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(I_m(f)I_m(g)) = m!\langle f, g\rangle_{L^2(T^m)}.$$

□

Lemme 1.1.2.6. L'espace $\mathcal{E}_m$ est dense dans $L^2(T^m)$.

Démonstration. Soit $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}$ de mesure μ finie et

$$A = A_1 \times ... \times A_m.$$

Comme la mesure μ est sans atome, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, pour tout $\gamma \in]0, \mu(A_i)[$, il existe $B_i \in \mathcal{B}$ tel que

$$B_i \subset A_i, \quad \mu(B_i) = \gamma.$$

De même, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mu(B_i) \leq \varepsilon,$$

et, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $J \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$$A = \bigcup_{j\in J} B_j.$$

Nous avons alors

$$\mathbb{1}_A = \sum_{1\leq i_1,...,i_m\leq n} \underbrace{\varepsilon_{i_1,...,i_m}}_{\in\{0,1\}} \mathbb{1}_{B_{i_1}\times...\times B_{i_m}}.$$

On considère la partition (I, J) de $[\![1, n]\!]^m$ définie par

$$I = \{(i_1, ..., i_m) \in [\![1, n]\!]^m, \forall k, l \in [\![1, m]\!], k \neq l \Longrightarrow i_k \neq i_l\},$$

et
$$J = [\![1,n]\!]^m \backslash I.$$
On considère également
$$\mathbb{1}_B = \sum_{(i_1,...,i_m)\in I} \varepsilon_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1}\times B_{i_m}}.$$
Alors $\mathbb{1}_B \in \mathcal{E}_m$ avec $B \subset A$, et
$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|^2_{L^2(T^m)} = \left\| \sum_{(i_1,...,i_m)\in J} \varepsilon_{i_1,...,i_m} \mathbb{1}_{B_{i_1}\times ... \times B_{i_m}} \right\|^2_{L^2(T^m)} = \sum_{(i_1,...,i_m)\in J} \varepsilon_{i_1,...,i_m} \mu(B_{i_1})...\mu(B_{i_m}).$$
Ainsi
$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|^2_{L^2(T^m)} \leq \sum_{(i_1,...,i_m)\in J} \mu(B_{i_1})...\mu(B_{i_m}).$$
D'où, par définition de J,
$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|^2_{L^2(T^m)} \leq \binom{m}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \right)^{m-2} \leq \binom{m}{2} \varepsilon^m n^{m-1}.$$
Par conséquent la fonction $\mathbb{1}_A$ peut être approchée par une fonction de $\mathcal{E}_m$. Or les fonctions de la forme $\mathbb{1}_A$ forment un sous-ensemble dense dans $L^2(T,\mathcal{B},\mu)$, donc $\mathcal{E}_m$ est dense dans $L^2(T,\mathcal{B},\mu)$. □

Corollaire 1.1.2.7. L'opérateur I_m peut être étendu en un opérateur continu de $L^2(T^m)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les propriétés de la proposition précédente.

Démonstration. En appliquant la propriété 4 de la proposition 1.1.2.5 avec $f = g \in \mathcal{E}_m$, on obtient
$$\mathbb{E}(I_m(f)^2) = m! \left\| \tilde{f} \right\|^2_{L^2(T^m)} \leq m! \|f\|^2_{L^2(T^m)},$$
car, par inégalité triangulaire
$$\left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(T^m)} \leq \frac{1}{m!} \sum_{\sigma\in S_m} \|f\|_{L^2(T^m)} = \|f\|_{L^2(T^m)}$$
Ainsi, l'application est continue de $\mathcal{E}_m$ dans $L^(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Puis, d'après le lemme précent, par densité, on peut étendre I_m en un opérateur continu sur $L^2(T^m)$. □

A partir de ces opérateurs, nous pouvons obtenir la décomposition en expansion de Wiener qui est l'analogue de la décomposition en chaos de Wiener dans le cadre $H = L^2(T,\mathcal{B},\mu)$.

Définition 1.1.2.8. Soit $f \in L^2(T^m)$. Alors l'intégrale multiple $I_m(f)$ de la fonciton f est notée
$$I_m(f) = \int_{T^m} f(t_1,...,t_m) W(dt_1)...W(dt_m).$$

Définition 1.1.2.9. Soit $f \in L^2(T^p), g \in L^2(T^q)$ symétriques et $r \in [\![1, \min(p,q)]\!]$. Alors on définit $f \otimes_r g \in L^2(T^{p+q-2r})$ par
$$(f \otimes_r g)(t_1,...,t_{p+q-2r}) = \int_{T^r} f(t_1,...,t_{p-r},s) g(t_{p+1},...,t_{p+q-r},s) \mu^r(ds).$$

Proposition 1.1.2.10. Soit $f \in L^2(T^p)$ symétrique et $g \in L^2(T)$. Alors
$$I_p(f) I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + p I_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Démonstration. Comme I_p est linéaire continu et les fonctions élémentaires sont denses dans $L^2(T^p)$, on peut supposer que f est le symétrisé d'une fonction $\mathbb{1}_{A_1\times ... \times A_p}$ avec $A_1,...,A_p \in \mathcal{B}$ de mesures μ finies et disjoints deux à deux :
$$f = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma\in S_p} \mathbb{1}_{A_1\times ... \times A_p}(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(p)}).$$

Si $g = \mathbb{1}_{A_0}$ avec $A_0 \in \mathcal{B}$ disjoints des $A_1, ..., A_p$, alors

$$f \otimes g \in \mathcal{E}_{p+1},$$

avec

$$I_{p+1}(f \otimes g) = I_p(f) I_1(g),$$

et, comme A_0 est dijsoint des $A_1, ..., A_p$,

$$(f \otimes_1 g)(t_1, ..., t_{p-1}) = \int_T f(t_1, ..., t_{p-1}, t_p) g(t_p) \mu(dt_p)$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \int_T \mathbb{1}_{A_1 \times ... \times A_p}(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(p-1)}, t_p) \mathbb{1}_{A_0}(t_p) \mu(dt_p) = 0,$$

d'où la formule annoncée. Maintenant si $g = \mathbb{1}_{A_i}$ avec $i \in [\![1, p]\!]$. Supposons $i = 1$. Posons

$$\beta = \mu(A_1) ... \mu(A_p) \in \mathbb{R}_+.$$

Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, une partition de A_1 en mesurable de mesures inférieures à ε :

$$A_1 = B_1 \sqcup ... \sqcup B_n, \mu(B_i) < \varepsilon,$$

et la fonciton élémentaire

$$h_\varepsilon = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \mathbb{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times ... \times A_p}.$$

Alors, par définition de I_p sur les fonctions élémentaires et linéarité du processus W,

$$I_p(f) I_1(g) = W(A_1)^2 W(A_2) ... W(A_p) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} W(B_i) W(B_j) W(A_2) ... W(A_p) + \sum_{i=1}^{n} W(B_i)^2 W(A_2) ... W(A_p)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} W(B_i) W(B_j) W(A_2) ... W(A_p) + \sum_{i=1}^{n} (W(B_i)^2 - \mu(B_i)) W(A_2) ... W(A_p) + \mu(A_1) W(A_2) ... W(A_p),$$

avec

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} W(B_i) W(B_j) W(A_2) ... W(A_p) = I_{p+1}(h_\varepsilon),$$

$$R_\varepsilon := \sum_{i=1}^{n} (W(B_i)^2 - \mu(B_i)) W(A_2) ... W(A_p),$$

et

$$\mu(A_1) W(A_2) ... W(A_p) = \mu(A_1) I_{p-1}(\mathbb{1}_{A_2 \times ... \times A_p}) = p I_{p-1}\left(\frac{1}{p} \tilde{\mathbb{1}}_{A_2 \times ... \times A_p} \mu(A_1)\right) = p I_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Donc

$$I_p(f) I_1(g) = I_{p+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + p I_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

De plus nous avons

$$\left\| \tilde{h}_\varepsilon - (f \tilde{\otimes} g) \right\|_{L^2(T^{p+1})}^2 = \left\| \tilde{h}_\varepsilon - \tilde{\mathbb{1}}_{A_1 \times A_1 \times ... \times A_p} \right\|_{L^2(T^{p+1})}^2 \leq \left\| h_\varepsilon - \mathbb{1}_{A_1 \times A_1 \times ... \times A_p} \right\|_{L^2(T^{p+1})}^2,$$

avec

$$h_\varepsilon - \mathbb{1}_{A_1 \times A_1 \times A_2 \times ... \times A_p} = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \mathbb{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times ... \times A_p} - \sum_{1 \leq i,j \leq p} \mathbb{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times ... \times A_p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i \times B_i \times A_1 \times ... \times A_p},$$

d'où

$$\left\|\tilde{h}_\varepsilon - (f \,\tilde{\otimes}\, g)\right\|^2_{L^2(T^{p+1})} \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mu(B_i)}_{\leq \varepsilon} \mu(B_i)\mu(A_2)...\mu(A_p) \leq \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)}_{=\mu(A_1)} \mu(A_2)...\mu(A_p) = \varepsilon\beta.$$

Par conséquent, par continuité de I_{p+1},

$$I_{p+1}(h_\varepsilon) = I_{p+1}(\tilde{h}_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} I_{p+1}((f \,\tilde{\otimes}\, g)) = I_{p+1}(f \otimes g).$$

Nous avons également, par indépendance,

$$\mathbb{E}(R_\varepsilon^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((W(B_i)^2 - \mu(B_i))^2) \underbrace{\mathbb{E}(W(A_2)^2)}_{=\mu(A_2)} ...\mathbb{E}(W(A_p)^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{\mathbb{E}(W(B_i)^4)}_{=3\mu(B_i)^2} - 2\mu(B_i) \underbrace{\mathbb{E}(W(B_i)^2)}_{=\mu(B_i)} + \mu(B_i)^2)\mu(A_2)...\mu(A_p) = 2\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)^2\mu(A_2)...\mu(A_p),$$

d'où

$$\mathbb{E}(R_\varepsilon^2) \leq 2\varepsilon\beta.$$

Par conséquent

$$R_\varepsilon \overset{L^2(\Omega)}{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}} 0.$$

Ainsi il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$R_{\varphi(\varepsilon)} \overset{PS}{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}} 0.$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 dans

$$I_p(f)I_1(g) = I_{p+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + pI_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Nous obtenons

$$I_p(f)I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + pI_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

On en déduit le résultat voulu par densité. □

On en déduit les résultats suivants par récurrence.

Corollaire 1.1.2.11. Soit $f \in L^2(T^p)$ et $g \in L^2(T^q)$ symétriques. Alors

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{\min(p,q)} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \otimes_r g).$$

Corollaire 1.1.2.12. Soit $h \in L^2(T)$ tel que $\|h\|_2 = 1$. Alors

$$m!H_m(W(h)) = \int_{T^m} h(t_1)...h(t_m)W(dt_1)...W(dt_m).$$

Ainsi l'opérateur I_m envoie $L^2(T^m)$ sur le chaos de Wiener $\mathcal{H}_m$.

Une conséquence directe de ce résultat est la décomposition en expansion de Wiener d'une variable aléatoire de carré intégrable.

Théorème 1.1.2.13. Expension en chaos de Wiener : Soit $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Alors il existe des fonctions symétriques $f_n \in L^2(T^n)$ uniques telles que

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n),$$

avec $f_0 = \mathbb{E}(F)$ et I_0 est l'identité sur l'ensemble des constantes $\mathcal{H}_0$.

Ce résultat termine l'étude des prérequis nécessaires à l'approche du calcul de Malliavin.

1.2 Dérivée de Malliavin

Commençons par définir la dérivée dans le cadre général où H est un espace de Hilbert séparable. Nous supposerons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complet et $\mathcal{F}$ engendré par W. Pour définir la dérivée d'une variable aléatoire, nous allons raisonner par densité en la définissant sur un espace particulier puis sur sa fermeture. Nous étudierons ensuite le cas pratique $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$.

1.2.1 Dans le cadre général

Définition 1.2.1.1. On note $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à croissance polynomiale et à dérivées partielles à croissance polynomiale, $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ celles bornées et $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ celles à support compact. Nous définissons alors les espaces de variables aléatoires suivants

$$\mathcal{S} := \{f(W(h_1), ..., W(h_n)), f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, ..., h_n \in H, n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\mathcal{S}_b := \{f(W(h_1), ..., W(h_n)), f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, ..., h_n \in H, n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\mathcal{S}_c := \{f(W(h_1), ..., W(h_n)), f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, ..., h_n \in H, n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\mathcal{P} := \{f(W(h_1), ..., W(h_n)), f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n], h_1, ..., h_n \in H, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Remarque 1.2.1.2. $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}_c$ sont denses dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.1.3. Soit $F = f(W(h_1), ..., W(h_n)) \in \mathcal{S}$. Alors la dérivée de F est la variable aléatoire à valeurs dans H définie par

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n)) h_i.$$

Exemple 1.2.1.4. $DW(h) = h$.

Remarque 1.2.1.5. Soit $F = f(W(h_1), ..., W(h_n)) \in \mathcal{S}$ et $h \in H$. Alors

$$\langle DF, h \rangle_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(f(W(h_1) + \varepsilon \langle h_1, h \rangle, ..., W(h_n) + \varepsilon \langle h_n, h \rangle) - f(W(h_1), ..., W(h_n)) \right) \right).$$

Autrement dit $\langle DF, h \rangle$ est la dérivée directionnelle de F.

Exemple 1.2.1.6. Soit $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $H = L^2([0,1], \lambda)$ et, pour tout $h \in H$,

$$W(h) := \int_0^1 h(s) dB(s).$$

Alors, par théorème sur l'intégrale stochastique, W est un processus gaussien. De plus il s'agit d'un processus gaussien isonormal car, pour tout $h, g \in H$, par identité de polarisation et isométrie d'Itô,

$$\mathbb{E}(W(h)W(g)) = \left\langle \int_0^1 h(s) dB(s), \int_0^1 g(s) dB(s) \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^1 h(s) g(s) ds = \langle h, g \rangle_H.$$

On considère $F = f(W(\mathbb{1}_{[0,t_1]}), ..., W(\mathbb{1}_{[0,t_n]})) \in \mathcal{S}$. Alors, pour tout $h \in H$,

$$\langle DF, h \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(B(t_1), ..., B(t_n)) \int_0^{t_i} h(t) dt.$$

Comme pour la dérivation des fonctions déterministes nous avons la propriété suivante.

Proposition 1.2.1.7. Soit $F, G \in \mathcal{S}$. Alors $FG \in \mathcal{S}$ et

$$D(FG) = FDG + GDF.$$

Démonstration. Nous avons, en utilisant les notations de la définition 1.2.1.1,

$$FG = f(W(h_1), ..., W(h_n)) g(W(g_1), ..., W(g_m)) = h(W(h_1), ..., W(h_n), W(g_1), ..., W(g_m)).$$

Donc

$$D(FG)=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(W(h_1),...,W(h_n))g(W(g_1),...,W(g_m))h_i+\sum_{j=1}^{m}f(W(h_1),...,W(h_n))\partial_j g(W(g_1),...,W(g_m))g_j.$$

Donc

$$D(FG)=GDF+FDG.$$

□

Lemme 1.2.1.8. Soit $F=f(W(h_1),...,W(h_n))\in\mathcal{S}$ et $h\in H$. Alors

$$\mathbb{E}(\langle DF,h\rangle)=\mathbb{E}(FW(h)).$$

Démonstration. Par linéarité, quitte à retirer des vecteurs h_i pour que $(h,h_1,...,h_n)$ soit une famille libre, on peut lui appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une famille orthonormée $(e_1,...,e_m)$ telle que $h=e_1$ et

$$F=f(W(e_1),...,W(e_m)).$$

On note ϕ la densité de $(W(e_1),...,W(e_m))\sim\mathcal{N}_m(0,I_m)$. Alors, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(\langle DF,h\rangle_H)=\mathbb{E}(\partial_1 f(W(e_1),...,W(e_m)))=\int_{\mathbb{R}^m}\partial_1 f(x)\phi(x)dx.$$

Puis, par intégration par parties et propriété de la densité ϕ,

$$\mathbb{E}(\langle DF,h\rangle_H)=\int_{\mathbb{R}^m}f(x)\partial_1\phi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^m}f(x)x_1\phi(x)dx.$$

Ainsi, de nouveau par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(\langle DF,h\rangle_H)=\mathbb{E}(f(W(e_1),...,W(e_m))W(e_1))=\mathbb{E}(FW(h)).$$

□

Grâce à ce lemme, nous obtenons le théorème d'intégration par parties suivant très utile en pratique dans les calculs de dérivée de Malliavin de variables aléatoires.

Théorème 1.2.1.9. Soit $F,G\in\mathcal{S}$ et $h\in H$. Alors

$$\mathbb{E}(G\langle DF,h\rangle_H)=\mathbb{E}(-F\langle DG,h\rangle_H+FGW(h)),$$

i.e.

$$\mathbb{E}(FGW(h))=\mathbb{E}(G\langle DF,h\rangle_H)+\mathbb{E}(F\langle DG,h\rangle_H).$$

Démonstration. Nous avons, d'après la proposition 1.2.1.7,

$$D(FG)=GDF+FDG.$$

Ainsi, en appliquant le lemme précédent, on obtient

$$\mathbb{E}(G\langle DF,h\rangle)+\mathbb{E}(F\langle DG,h\rangle)=\mathbb{E}(FGW(h)).$$

□

Proposition 1.2.1.10. L'opérateur D est fermable de $\mathcal{S}\subset L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega,H)$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Démonstration. Soit $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$F_N\underset{N\to+\infty}{\overset{L^p}{\longrightarrow}}0,\quad DF_N\underset{N\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega,H)}{\longrightarrow}}\eta\in L^p(\Omega,H).$$

Soit $h\in H$ et $F\in\mathcal{S}_b$. Alors $FW(h)\in S$, d'où, d'après le théorème précédent,

$$\mathbb{E}(\langle\eta,h\rangle F)=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}(\langle DF_N,h\rangle F)=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}(-F_N\langle DF,h\rangle+F_NFW(h))=0.$$

Ainsi

$$\eta=0.$$

□

Par conséquent on peut alors définir le domaine de la dérivée de Malliavin dans $L^p(\Omega)$.

Définition 1.2.1.11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{D}^{1,p}$ est défini comme le domaine de D dans $L^p(\Omega)$ i.e. la fermeture de $\mathcal{S}$ pour la norme

$$\|F\|_{1,p} = (\mathbb{E}(|F|^p) + \mathbb{E}(\|DF\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.2.1.12. Les propriétés précédentes sont alors vraies pour toutes variables aléatoires dans $\mathbb{D}^{1,p}$, non seulement dans $\mathcal{S}$.

Remarque 1.2.1.13. Pour $p = 2$, nous avons la propriété important que $\mathbb{D}^{1,2}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle F, G\rangle = \mathbb{E}(FG) + \mathbb{E}(\langle DF, DG\rangle).$$

On peut définir de même la dérivée k-ième de Malliavin et la dérivée de Malliavin selon un vecteur $h \in H$.

Définition 1.2.1.14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathcal{S}$. Alors la k-ième dérivée de F est définie par

$$D^k F = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \ldots \partial x_k}(W(h_1), \ldots, W(h_n))(h_{i_1} \otimes \ldots \otimes h_{i_k}) \in H^{\otimes k}.$$

Définition 1.2.1.15. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathcal{S}$. Alors on définit la semi-norme $\|\cdot\|_{k,p}$ par

$$\|F\|_{k,p} = \left(\mathbb{E}(|F|^p) + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.2.1.16. La famille de semi-normes $(\|\cdot\|_{k,p})_{k,p\in\mathbb{N}^*}$ vérifie :

1. La monotonicité :
$$\forall p \leq q, k \leq l, \quad \exists c = c(p, q, k, l) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall F \in \mathcal{S}, \quad \|F\|_{k,p} \leq c\, \|F\|_{l,q}.$$
2. La fermabilité : Pour tout $k, p \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur D^k est fermable de $\mathcal{S}$ dans $L^p(\Omega, H^{\otimes k})$.
3. La compatibilité : Pour tout $p, q, k, j \in \mathbb{N}^*$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$,
$$\|F_n\|_{k,p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|F_n - F_m\|_{j,q} \underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \|F_n\|_{j,q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration.

1. Soit $F \in \mathcal{S}, p \leq q$ et $k \leq l$. Alors
$$\|F\|_{k,p}^p = \mathbb{E}(|F|^p) + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^p) \leq \mathbb{E}(|F|^p) + \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^p).$$
Or, pour tout $j \in [\![0, l]\!]$, en appliquant l'inégalité de Hölder avec $p_1 = \frac{q}{p}$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$,
$$\mathbb{E}\left(\left\|D^j F\right\|)^p\right) \leq \mathbb{E}\left(\left\|D^j F\right\|^{pp_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \times 1 = \mathbb{E}\left(\left\|D^j F\right\|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$
Ainsi
$$\|F\|_{k,p}^p \leq \mathbb{E}(|F|^q)^{\frac{p}{q}} + \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^q)^{\frac{p}{q}}.$$
De plus
$$\|F\|_{l,q}^p = \left(\mathbb{E}(|F|^q) + \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^q)\right)^{\frac{p}{q}}$$
Puis, par concavité de $x \longmapsto x^{\frac{p}{q}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $p \leq q$,
$$\|F\|_{q,l}^p \geq (l+1)^{\frac{p}{q}-1} \left(\mathbb{E}(|F|^q)^{\frac{p}{q}} + \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}(\left\|D^j F\right\|^q)^{\frac{p}{q}}\right).$$

2. Il s'agit du même raisonnement que pour montrer que D est fermable.
3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\|F_n\|_{k,p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \|F_n - F_m\|_{j,q} \underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{D}^{j,q}$ complet, donc converge vers $F \in \mathbb{D}^{j,q}$, en particulier

$$F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^q(\Omega)}{\longrightarrow}} F.$$

Ainsi il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$F_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} F.$$

De plus $F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{D}^{k,p}}{\longrightarrow}} 0$, donc en particulier

$$F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}} 0.$$

Ainsi, par extraction d'une suite convergente, $F_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}} 0$.
Donc il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$F_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} 0.$$

Or, par extraction d'une suite convergente, $F_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} F$.
Donc, par unicité de la limite $F = 0$ et

$$F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^q(\Omega)}{\longrightarrow}} 0.$$

Puis, par fermabilité de l'opérateur D,

$$\|F_n\|_{j,q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

On définit alors de même le domaine de D^k dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.1.17. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{D}^{k,p}$ est défini comme le complété de $\mathcal{S}$ pour la norme $\|\cdot\|_{k,p}$, et pour $k = 0$ on pose $\|\cdot\|_{0,p} = \|\cdot\|_p$ et $\mathbb{D}^{0,p} = L^p(\Omega)$.

Remarque 1.2.1.18. Soit $k, p > q \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{D}^{k+1,p} \subset \mathbb{D}^{k,q}$.

Définition 1.2.1.19. Soit $h \in H$. Alors l'opérateur D^h sur $\mathcal{S}$ est défini par

$$\forall F \in \mathcal{S}, D^h F = \langle DF, h\rangle.$$

Remarque 1.2.1.20. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $h \in H$. Alors D^h est également fermable de L^p dans L^p. On note alors son domaine $\mathbb{D}^{h,p}$.

Pour obtenir une caractérisation d'appartenance au domaine de D, on peut s'intéresser à la décomposition en chaos de Wiener de la variable aléatoire.

Proposition 1.2.1.21. Soit $F \in L^2(\Omega)$ de décomposition en chaos de Wiener $F = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n F$ où J_n est la projection de $L^2(\Omega)$ sur le chaos de Wiener d'ordre n. Alors $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \|J_n F\|_2^2 < +\infty.$$

Dans ce cas
$$\mathbb{E}(\|DF\|_H^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \|J_n F\|_2^2,$$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$D(J_n F) = J_{n-1}(DF),$$
où J_{n-1} est la projection de $L^2(\Omega, H)$ sur le chaos de Wiener d'ordre $n-1$.

Démonstration. On considère
$$\phi_a = \sqrt{a!} \prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i)),$$
avec $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Alors, d'après le corollaire 1.1.1.5 et la propriété $D(FG) = GDF + FDG$,
$$D(\phi_a) = \sqrt{a!} \sum_{j=1}^{+\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i)) H_{a_j - 1}(W(e_j)) e_j.$$

Puis si $|a| = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = n$ alors, comme les e_i forment une base hilbertienne de H,
$$\mathbb{E}\left(\|D(\phi_a)\|_H^2\right) = \mathbb{E}\left(a! \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i)) H_{a_j-1}(W(e_j)) \right)^2 \right) = a! \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{+\infty} H_{a_i}(W(e_i)) H_{a_j-1}(W(e_j)) \right)^2 \right).$$
Ainsi, après calculs similaires à la démonstration de la proposition 1.1.1.17,
$$\mathbb{E}\left(\|D(\phi_a)\|_H^2\right) = a! \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{+\infty} a_i! (a_j - 1)!} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{+\infty} a_i!}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{+\infty} a_i! (a_j - 1)!} = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = |a| = n.$$
Or, d'après la proposition 1.1.1.18, de tels ϕ_a forment une base hilbertienne de $\mathcal{H}_n$, et $J_n F \in \mathcal{H}_n$, donc
$$J_n F = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ |a| = n}} \alpha_a \phi_a,$$
et on en déduit le résultat souhaité car
$$\mathbb{E}\left(\|D(J_n F)\|_H^2\right) = \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ |a| = n}} a_\alpha D(\phi_a) \right\|_H^2 \right) = n \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ |a| = n}} \alpha_2^2 = n \|J_n F\|_2^2.$$
□

Remarque 1.2.1.22. De même, par récurrence, on obtient
$$D^k(J_n F) = J_{n-k}(D^k F),$$
et ainsi
$$\mathbb{E}\left(\left\|D^k F\right\|_{H^{\otimes k}}^2 \right) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1) \|J_n F\|_2^2,$$
et $F \in \mathbb{D}^{k,2}$ si et seulement si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k \|J_n F\|_2^2 < +\infty$.

Tout comme l'intégration par partie, la règle de la chaîne suivante est l'une des plus utiles en pratique pour calculer la dérivée de Malliavin d'une variable aléatoire.

Théorème 1.2.1.23. Soit $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable à dérivées partielles bornées, $p \in \mathbb{N}^*$ et $F = (F^1, ..., F^m) \in (\mathbb{D}^{1,p})^{\mathbb{N}}$. Alors $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ et

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

Démonstration. On se limite au cas $m = 1$. Le cas général se prouve de la même manière avec davantage de technicité. On considère $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi_k(x) = k\psi(kx),$$

avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\mathrm{Supp}(\psi) \subset [-1, 1], \qquad \int_{-1}^{1} \psi(x)dx = 1.$$

Alors, par théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, $\varphi_k := \varphi * \psi_k$ est de classe C^∞, bornée et de dérivée bornée. De plus, par définition de $\mathbb{D}^{1,p}$, il existe $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} = (f_k(W(h_1), ..., W(h_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$F_k \underset{k\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}} F.$$

Ainsi, par caractère fermé de D,

$$DF_k \underset{k\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega,H)}{\longrightarrow}} DF.$$

Or

$$D(\varphi_k(F_k)) = \sum_{i=1}^{n_k} \partial_i(\varphi_k \circ f_k)(W(h_1), ..., W(h_{n_k}))h_i = \sum_{i=1}^{n_k} \varphi_k'(f_k(W(h_1), ..., W(h_{n_k})))\partial_i f_k(W(h_1), ..., W(h_{n_k}))h_i,$$

d'où

$$D(\varphi_k(F_k)) = \varphi_k'(F_k)DF_k.$$

Pour obtenir la même égalité avec φ et F, on part de l'inégalité triangulaire suivante

$$\|\varphi_k'(F_k)DF_k - \varphi'(F)DF\|_{L^p(\Omega,H)}$$
$$\leq \underbrace{\|\varphi_k'(F_k)(DF_k - DF)\|_{L^p(\Omega,H)}}_{=:A_k} + \underbrace{\|(\varphi_k'(F_k) - \varphi'(F_k))DF\|_{L^p(\Omega,H)}}_{=:B_k} + \underbrace{\|(\varphi'(F_k) - \varphi'(F))DF\|_{L^p(\Omega,H)}}_{=:C_k}.$$

Pour le terme A_k, on a

$$\|\varphi_k'\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty.$$

Donc

$$A_k \leq \|\varphi'\|_\infty \|DF_k - DF\|_{L^p(\Omega,H)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour le terme B_k, on a $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$(\varphi_k'(F_k) - \varphi'(F))DF \underset{k\to+\infty}{\overset{H}{\longrightarrow}} 0,$$

et, comme $F \in \mathbb{D}^{1,p}$,

$$\|(\varphi_k'(F_k) - \varphi'(F_k))DF\|_{L^p(\Omega,H)} \leq 2\|\varphi'\|_\infty \|DF\|_{L^p(\Omega)} < +\infty.$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour le terme C_k on a pour la même raison

$$C_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent on a

$$\varphi_k'(F_k)DF_k \underset{k\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega,H)}{\longrightarrow}} \varphi'(F)DF.$$

De plus

$$\varphi_k(F_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(F).$$

Donc, par caractère fermé de D, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ et

$$D(\varphi(F)) = \varphi'(F)DF.$$

$\square$

Remarque 1.2.1.24. On peut affaiblir l'hypothèse de régularité sur φ. En effet si $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne et $F = (F^1, ..., F^m) \in \left(\mathbb{D}^{1,2}\right)^m$. Alors $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et il existe un vecteur aléatoire $G = (G^1, ..., G^m)$ borné par K tel que

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} G^i DF^i.$$

Exemple 1.2.1.25. Si la loi du vecteur F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ alors $G^i = \partial_i \varphi(F)$ dans le théorème précédent.

Comme pour la dérivation déterministe, si la dérivée est nulle alors la fonction à dériver est constante. Pour le démontrer commençons par le lemme suivant.

Lemme 1.2.1.26. Les variables 1 et $W(h)G - D^hG$, pour $G \in S_b$ et $h \in H$, forment une famille totale dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Soit $h \in H, n, N \in \mathbb{N}^*$ et

$$G_N = W(h)^n \psi_N(W(h)),$$

avec $\psi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tel que $\psi_N(x) = 0$ si $|x| \geq N+1$ et $\psi_N(x) = 1$ si $|x| \leq N$, et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}^*} |\psi_N'(x)| < +\infty.$$

Alors

$$W(h)G_N - D^hG_N \underset{N\to+\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} W(h)^{n+1} - n\,\|h\|_H^2\, W(h)^{n-1}$$

d'après le théorème de convergence dominée en utilisant

$$W(h)G_N = W(h)^{n+1}\psi_N(W(h)) \underset{N\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} W(h)^{n+1} \times 1,$$

la règle de la chaîne

$$\begin{aligned} D^hG_N = \langle DG_N, h\rangle_H &= \langle W(h)^n \psi_N'(W(h)) D(W(h)), h\rangle_H + \langle \psi_N(W(h)) D(W(h)^n), h\rangle_H \\ &= W(h)^n \psi_N'(W(h))\, \|h\|_H^2 + n\psi_N(W(h))W(h)^{n-1}\, \|h\|_H^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} 0 + nW(h)^{n-1}\, \|h\|_H^2\,, \end{aligned}$$

et les dominations donnée par ψ_N bornée par 1 et $\sup_{x\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}^*} |\psi_N'(x)| < +\infty$. Par conséquent l'adhérence de la famille considérée contient tous les $W(h)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in H$. On en déduit le résultat grâce au théorème de décomposition en chaos de Wiener. $\square$

Proposition 1.2.1.27. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,1}$ tel que $DF = 0$. Alors $F = \mathbb{E}(F)$ i.e. F est constante.

Démonstration. Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ alors, d'après la proposition 1.2.1.21,

$$0 = \mathbb{E}(\|DF\|_H^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, \|J_nF\|_2^2\,.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_nF = 0.$$

Donc
$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n F = J_0 F = \mathbb{E}(F).$$
Par conséquent F est une variable aléatoire constante.
Maintenant si $F \in \mathbb{D}^{1,1}$. On considère $\psi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que
$$\psi_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq N+1 \\ x & \text{si} \quad |x| \leq N. \end{cases}$$
Par définition de $\mathbb{D}^{1,1}$, il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires lisses telle que
$$F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow}} F, \quad DF_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1(\Omega,H)}{\longrightarrow}} DF = 0.$$
Alors, pour tout $G \in \mathcal{S}_b$ et $h \in H$, par intégration par parties,
$$\mathbb{E}(\psi_N(F_n)(W(h)G - D^h G)) = \mathbb{E}(\psi_N(F_n)W(h)G) - \mathbb{E}(\psi_N(F_n)\langle DG, h\rangle_H)$$
$$= \mathbb{E}(\psi_N(F_n)W(h)G) - \mathbb{E}(\psi_N(F_n)GW(h)) + \mathbb{E}(G\langle D(\psi_N(F_n)), h\rangle_H),$$
i.e.
$$\mathbb{E}(\psi_N(F_n)(W(h)G - D^h G)) = \mathbb{E}(G\langle D(\psi_N(F_n)), h\rangle_H).$$
Or, par règle de la chaîne,
$$D(\psi_N(F_n)) = \psi_N'(F_n)DF_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1(\Omega,H)}{\longrightarrow}} 0.$$
Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, nous obtenons
$$\mathbb{E}(\psi_N(F)(W(h)G - D^h G)) = 0.$$
Ainsi, d'après le lemme précédent, $\psi_N(F) \in \mathrm{Vect}(1)$ i.e. $\psi_N(F)$ est constant pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ i.e.
$$\mathbb{E}(\psi_N(F)) = \psi_N(F).$$
Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons
$$\mathbb{E}(F) = F$$
ce qui montre que F est une variable aléatoire constante. □

Corollaire 1.2.1.28. Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{1}_A \in \mathbb{D}^{1,1}$ si et seulement si $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Démonstration. On suppose $\mathbb{1}_A \in \mathbb{D}^{1,1}$. On considère $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\varphi(x) = x^2.$$
Alors, d'après la règle de la chaîne,
$$D\mathbb{1}_A = D(\mathbb{1}_A^2) = D(\varphi(\mathbb{1}_A)) = \varphi'(\mathbb{1}_A)D\mathbb{1}_A = 2\mathbb{1}_A D\mathbb{1}_A.$$
Ainsi, pour $\omega \in A$,
$$(D\mathbb{1}_A)(\omega) = 2(D\mathbb{1}_A)(\omega)$$
et, pour $\omega \in A^c$,
$$(D\mathbb{1}_A)(\omega) = 2 \times 0 \times (D\mathbb{1}_A)(\omega) = 0.$$
Donc
$$D\mathbb{1}_A = 0.$$
Par conséquent, d'après la proposition précédente,
$$\mathbb{1}_A = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A),$$
d'où $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$. Réciproquement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ alors $\mathbb{1}_A = 1$ ou $\mathbb{1}_1 = 0$. Dans les deux cas $\mathbb{1}_A \in \mathbb{D}^{1,1}$. □

1.2.2 Dans la cadre $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$

On se place maintenant dans le cadre usuel en pratique $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ avec μ une mesure σ-finie sans atomes sur l'espace mesuré $(T, \mathcal{B})$.

Remarque 1.2.2.1. Dans ce cas, pour $F \in \mathcal{S}$, DF est une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ et sera donc noté

$$DF = (D_t F)_{t \in T}.$$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$D^k F = (D^k_{t_1,\dots,t_k} F)_{t_1,\dots,t_k \in T}.$$

A partir de la décomposition en chaos de Wiener d'une variable aléatoire, on obtient facilement sa dérivée de Malliavin.

Proposition 1.2.2.2. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ de décomposition en expansion de Wiener

$$F = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(f_n),$$

avec f_n fonctions symétriques de $L^2(T^n)$. Alors

$$D_t F = \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)),$$

où $I_{n-1}(f_n(\cdot,t))$ est le projeté de la fonction $(t_1, ..., t_{n-1}) \longmapsto f(\cdot, t)$ (définie pour μ-presque tout $t \in T$) sur le chaos de Wiener d'ordre $n-1$.

Démonstration. On suppose $F = I_n(f_n)$, avec $f_n \in \mathcal{E}_n$ symétrique

$$f_n(t_1, ..., t_n) = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} a_{i_1,\dots,i_m} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}}(t_1, ..., t_n).$$

Alors, par linéarité de D,

$$D_t F = D_t \left(\sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} a_{i_1,\dots,i_m} W(A_{i_1}) ... W(A_{i_m}) \right) = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} a_{i_1,\dots,i_m} D_t \left(W(A_{i_1}) ... W(A_{i_m}) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} a_{i_1,\dots,i_m} W(A_1) ... W(A_{i_{j-1}}) \underbrace{D_t W(A_{i_j})}_{= \mathbb{1}_{A_{i_j}}(t)} W(A_{i_{j+1}}) ... W(A_{i_m}) \right).$$

Ainsi, comme f_n est symétrique on en déduit des relations entres les $a_{i_1,\dots,i_m}$ et les A_j, d'où

$$D_t F = n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)).$$

On suppose maintenant $F = I_n(f_n)$ avec $f_n \in L^2(T^n)$. Alors, par densité de $\mathcal{E}_n$ dans $L^2(T^n)$ et continuité de I_n, on obtient la même relation

$$D_t F = n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)).$$

Pour finir, dans le cas général, par linéarité et continuité de D,

$$D_t F = \sum_{n=1}^{+\infty} D_t(I_n(f_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)).$$

□

Lemme 1.2.2.3. Soit $F \in L^2(\Omega)$ et $A \in \mathcal{B}$. Alors

$$\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}).$$

Démonstration. Comme pour la démonstration précédente, il suffit de raisonner avec

$$F = I_n(f_n), f_n = \mathbb{1}_{A_{i_1} \times A_{i_n}},$$

et $A_{i_1}, ..., A_{i_n} \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints et de mesures μ finies. On a alors

$$\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A) = \mathbb{E}(W(A_{i_1})...W(A_{i_n}) \mid \mathcal{F}_A) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} (W(A_i \cap A) + W(A_i \cap A^c)) \middle| \mathcal{F}_A\right).$$

D'où, par indépendance des $W(A_1 \cap A), ..., W(A_n \cap A), W(A_1 \cap A^c), ..., W(A_n \cap A^c)$, $\mathcal{F}_A$-mesurabilité des $W(A_1 \cap A), ..., W(A_n \cap A)$, indépendance entre $\mathcal{F}_A$ et $W(A_1 \cap A^c), ..., W(A_n \cap A^c)$, et $\mathbb{E}(W(A_i \cap A^c)) = 0$,

$$\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A) = \prod_{i=1}^{n} W(A_i \cap A) = I_n(\mathbb{1}_{(A_1 \cap A) \times ... \times (A_n \cap A)}) = I_n(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}).$$

On en déduit le résultat par densité et décomposition en expansion de Wiener. □

Proposition 1.2.2.4. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $A \in \mathcal{B}$. Alors $\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_t(\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A)) = \mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_A)\mathbb{1}_A(t).$$

Démonstration. D'après les deux résultats précédents, on obtient

$$D_t(\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A)) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_t(I_n(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n})) = \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t)\mathbb{1}_A^{\otimes(n-1)} \mathbb{1}_A(t)\right) = \mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_A)\mathbb{1}_A(t).$$

□

Corollaire 1.2.2.5. Soit $A \in \mathcal{B}$ et $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_A$-mesurable. Alors

$$(D_t F)_{|A^c \times \Omega} \overset{\mu \otimes \mathbb{P}-PS}{=} 0.$$

Démonstration. Comme F est $\mathcal{F}_A$-mesurable, on a, d'après la proposition précédente, pour $t \in A^c$,

$$D_t F = D_t(\mathbb{E}(F \mid \mathcal{F}_A)) = \mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_A)\mathbb{1}_A(t) = 0.$$

□

Exemple 1.2.2.6. Si T est un segment de la forme $[0, T]$, $\mathcal{B}$ le tribu borélienne et μ la mesure de Lebesgue alors, pour tout processus $(u_t)_{t \in [0,T]}$ adapté et $s > t$,

$$D_s u_t = 0$$

1.3 Divergence de Malliavin

1.3.1 Définition et propriétés

Le second opérateur important en calcul de Malliavin est l'opérateur divergence qui est défini par dualité par rapport à l'opérateur de dérivée de Malliavin ;

Définition 1.3.1.1. Opérateur divergence : On définit l'opérateur divergence δ comme l'adjoint de l'opérateur D, i.e. δ est l'opérateur non borné sur $L^2(\Omega, H)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ tel que :

1. Le domaine $\mathrm{Dom}(\delta)$ de δ est l'ensemble des $u \in L^2(\Omega, H)$ tel qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,
$$|\mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H)| \leq c \|F\|_2 .$$
2. Pour tout $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$, $\delta(u)$ est l'élément de $L^2(\Omega)$ caractérisé par
$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \mathbb{E}(F\delta(u)) = \mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H).$$

Remarque 1.3.1.2. L'opérateur δ est fermé comme l'adjoint de l'opérateur D non borné et de domaine dense.

Pour commencer nous allons définir Du pour u variable aléatoire à valeurs dans H. Pour se faire nous définissons une catégorie de variables aléatoires vectorielles lisses en un certain sens. Sur cette catégorie, nous définissons la dérivée de Malliavin de façon naturelle que nous allons étendre par fermabilité au domaine de D sur $L^2(\Omega, H)$.

Définition 1.3.1.3. On définit $\mathcal{S}_H$ l'espace des éléments u de la forme

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j,$$

avec $F_j \in \mathcal{S}$ et $h_j \in H$.

Remarque 1.3.1.4. Quitte à enlever des vecteurs h_j et rajouter des $F_j = 0$, on peut supposer que u s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} F_j e_j,$$

avec $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H.

Définition 1.3.1.5. Soit $u \in \mathcal{S}_H$. Alors la variable Du dans $H \otimes H$ est défini par

$$Du = \sum_{j=1}^{n} DF_j \otimes h_j.$$

De plus, pour $h \in H$, la variable aléatoire $D^h u$ dans H est défini par

$$D^h u = \sum_{j=1}^{n} D^h F_j h_j = \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h \rangle_H h_j.$$

Remarque 1.3.1.6. Par fermabilité de l'opérateur D, on définit $\mathbb{D}^{1,2}(H)$ comme le domaine de l'opérateur D sur $\mathcal{S}_H$.

Proposition 1.3.1.7. L'opérateur δ a les propriétés suivantes :

1. Soit $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Alors $\mathbb{E}(\delta(u)) = 0$.
2. L'opérateur δ est linéaire sur $\mathrm{Dom}(\delta)$.
3. Soit $u \in \mathcal{S}_H$ de la forme précédente. Alors $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h_j \rangle_H.$$

4. Soit $u \in \mathcal{S}_H$ de la forme précédente, $F \in \mathcal{S}$ et $h \in H$. Alors

$$D^h(\delta(u)) = \langle D(\delta(u)), h \rangle_H = \langle u, h \rangle_H + \delta\left(\sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h \rangle_H h_j\right) = \langle u, h \rangle_H + \delta(D^h u).$$

Démonstration.

1. Pour $F = 1 \in \mathbb{D}^{1,2}$, on a
$$\mathbb{E}(\delta(u)) = \mathbb{E}(F\delta(u)) = \mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H) = 0.$$
2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Alors, pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,
$$\mathbb{E}(\langle DF, \lambda u + \lambda v \rangle_H) = \lambda \mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H) + \mu \mathbb{E}(\langle DF, v \rangle_H) = \lambda \mathbb{E}(F\delta(u)) + \mu \mathbb{E}(F\delta(v)) = \mathbb{E}(F(\lambda\delta(u) + \mu\delta(v)).$$
D'où, par caractérisation,
$$\delta(\lambda u + \mu v) = \lambda\delta(u) + \mu\delta(v).$$

3. Pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$|\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle_H)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(F_j\langle DF, h_j\rangle_H)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\mathbb{E}(F_j\langle DF, h_j\rangle_H)|.$$

Or, par intégration par parties,

$$\mathbb{E}(F_j\langle DF, h_j\rangle_H) = \mathbb{E}(-F\langle DF_j, h_j\rangle + FF_jW(h_j)).$$

D'où

$$|\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle)| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}(|F\langle DF_j, h_j\rangle|) + \mathbb{E}(|FF_jW(h_j)|\right).$$

Ainsi, par inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $c_u \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$|\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle)| \leq c_u \left\|F\right\|_2.$$

Donc $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. De plus

$$\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} F_j\langle DF, h_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(F_j\langle DF, h_j\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}(-F\langle DF_j, h_j\rangle + FF_jW(h_j))\right).$$

D'où

$$\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle) = \mathbb{E}\left(F\left(\sum_{j=1}^{n} F_jW(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h_j\rangle\right)\right).$$

Ainsi, par caractérisation,

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_jW(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h_j\rangle.$$

4. Ainsi, par linéarité de D,

$$D(\delta(u)) = \sum_{j=1}^{n} \left(D(F_jW(h_j)) - D(\langle DF_j, h_j\rangle)\right) = \sum_{j=1}^{n} (W(h_j)DF_j + F_j \underbrace{D(W(h_j))}_{=h_j} - D(\langle DF_j, h_j\rangle)).$$

Donc

$$\langle D(\delta(u)), h\rangle = \sum_{j=1}^{n} (W(h_j)\langle DF_j, h\rangle + F_j\langle h_j, h\rangle - \langle D(\langle DF_j, h_j\rangle), h\rangle).$$

Ainsi, comme $\langle u, h\rangle = \sum_{j=1}^{n} F_j\langle h_j, h\rangle$,

$$\langle D(\delta(u)), h\rangle = \langle u, h\rangle + \sum_{j=1}^{n} (W(h_j)\langle DF_j, h\rangle - \langle D(\langle DF_j, h_j\rangle), h\rangle).$$

De plus, encore d'après ce qui précède,

$$\delta\left(\sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h\rangle h_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h\rangle W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle D(\langle DF_j, h\rangle), h_j\rangle.$$

Or, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\langle D(\langle DF_j, h\rangle), h_j\rangle = \langle D(\langle DF_j, h_j\rangle), h\rangle.$$

En effet, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de D, il suffit de le montrer pour les vecteurs de la base hilbertienne. On écrit $F_j = f_j(W(e_1), ..., W(e_m))$, alors, pour tout $i, k \in \mathbb{N}$,

$$\langle D(\langle DF_j, e_i\rangle), e_k\rangle = \langle D\left(\partial_i f_j(W(e_1), ..., W(e_m))\right), e_k\rangle = \partial_{i,k} f_j(W(e_1), ..., W(e_m)),$$

d'où, par lemme de Schwarz,

$$\langle D(\langle DF_j, e_i\rangle), e_k\rangle = \partial_{k,i} f_j(W(e_1), ..., W(e_m)) = \langle D(\langle DF_j, e_k\rangle), e_i\rangle.$$

Par conséquent on a bien

$$\langle D(\delta(u)), h\rangle = \langle u, h\rangle + \delta\left(\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, h\rangle h_j\right).$$

□

Théorème 1.3.1.8. Soit $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Alors

$$\|\delta(u)\|_{0,2}^2 = \mathbb{E}(\delta(u)^2) \leq \|u\|_{1,2}^2.$$

Ainsi $\mathbb{D}^{1,2}(H) \subset \mathrm{Dom}(\delta)$ et δ est continu de $\mathbb{D}^{1,2}(H)$ dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{S}_H$ et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors, par définition de δ,

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}(\langle D(\delta(u)), u\rangle)$$

Puis, comme $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H,

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\langle D(\delta(u)), e_i\rangle\langle u, e_i\rangle\right).$$

Or, d'après la propriété 4 de la proposition précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\langle D(\delta(u)), e_i\rangle = \langle u, e_i\rangle + \delta\left(\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle h_j\right).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}\left(\|u\|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\delta\left(\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle h_j\right)\langle u, e_i\rangle\right).$$

Puis, par définition de l'opérateur δ,

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}\left(\|u\|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\left\langle D(\langle u, e_i\rangle), \sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle h_j\right\rangle\right).$$

Ainsi, comme $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H,

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}\left(\|u\|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\langle D(\langle u, e_i\rangle), e_k\rangle\left\langle\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle h_j, e_k\right\rangle\right),$$

avec, pour tout $i, k \in \mathbb{N}$, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de D,

$$\begin{aligned}
\left\langle\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle h_j, e_k\right\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, e_i\rangle\langle h_j, e_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle\langle h_j, e_k\rangle DF_j, e_i\rangle \\
&= \left\langle\sum_{j=1}^{n}\langle h_j, e_k\rangle DF_j, e_i\right\rangle \\
&= \langle D(\langle u, e_k\rangle), e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) = \mathbb{E}(\|u\|^2) + \mathbb{E}\left(\sum_{i,k=0}^{+\infty}\langle D(\langle u, e_k\rangle), e_i\rangle\langle D(\langle u, e_i\rangle), e_k\rangle\right).$$

Ainsi, par inégalité de Cauchy-Schwarz sur $l^2(\mathbb{N}^2)$,

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) \leq \mathbb{E}(\|u\|^2) + \mathbb{E}\left(\sum_{i,k=0}^{+\infty} \langle D(\langle u, e_k\rangle), e_i\rangle^2\right).$$

On prend à partir de maintenant le choix des $h_j = e_j$ comme dans la remarque 1.3.1.4. On a, pour tout $i, k \in \mathbb{N}$, par bilinéarité du produit scalaire sur $H \otimes H$,

$$\langle Du, e_i \otimes e_k\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} DF_j \otimes e_j, e_i \otimes e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, e_i\rangle\langle e_j, e_k\rangle = \langle DF_k, e_i\rangle,$$

et

$$D(\langle u, e_k\rangle) = D\left(\left\langle \sum_{j=1}^{n} F_j e_j, e_k \right\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n} D(F_j\langle e_j, e_k\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, e_k\rangle DF_j = DF_k,$$

d'où

$$\langle D(\langle u, e_k\rangle), e_i\rangle = \langle DF_k, e_i\rangle = \langle Du, e_i \otimes e_k\rangle.$$

Finalement

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) \leq \mathbb{E}(\|u\|^2) + \mathbb{E}\left(\sum_{i,k=0}^{+\infty} \langle Du, e_i \otimes e_k\rangle^2\right) = \mathbb{E}(\|u\|^2) + \mathbb{E}(\|Du\|^2) = \|u\|_{1,2}^2.$$

Maintenant si $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, alors il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_H^{\mathbb{N}}$ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2(H)}{\longrightarrow}} u \text{ et } Du_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2(H\otimes H)}{\longrightarrow}} Du.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\delta(u_n)\|_{0,2}^2 \leq \|u_n\|_{1,2}^2,$$

et

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \mathbb{E}(F\delta(u_n)) = \mathbb{E}(\langle DF, u_n\rangle) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\langle DF, u\rangle).$$

Donc

$$\delta(u_n) \underset{n\to+}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \delta(u).$$

Ainsi, par passage à la limite

$$\|\delta(u)\|_{0,2}^2 \leq \|u\|_{1,2}^2.$$

□

Remarque 1.3.1.9. De façon similaire, on peut aussi montrer que l'opérateur δ est continu de $\mathbb{D}^{k,p}(H)$ dans $\mathbb{D}^{k-1,p}$ pour tout $p \in [\![2, +\infty[\![$ et $k \in \mathbb{N}^*$: il existe $c_{k,p} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{D}^{k,p}(H), \|\delta(u)\|_{k-1,p} \leq c_{k,p} \|u\|_{k,p}.$$

Ainsi $\mathbb{D}^{k,p}(H) \subset \mathrm{Dom}(\delta)$.

Grâce à l'opérateur divergence, on obtient une manière de calculer D^hG dont la démonstration utilise la décomposition en chaos de Wiener.

Proposition 1.3.1.10. Soit $h \in H$ et $G \in L^2(\Omega)$ tel qu'il existe $Y \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \mathbb{E}(G\delta(hF)) = \mathbb{E}(YF).$$

Alors $G \in \mathbb{D}^{h,2}$ et

$$D^hG = Y.$$

Démonstration. On écrit la décomposition en chaos de Wiener de $G \in L^2(\Omega)$,

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n(G).$$

Ainsi, pour tout $F \in \mathbb{D}^{h,2}$,

$$\mathbb{E}(YF) = \mathbb{E}(G\delta(hF)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}((J_n(G))\delta(hF)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\langle D(J_n(G)), hF\rangle) = \mathbb{E}\left(F \sum_{n=1}^{+\infty} D^h(J_n(G))\right).$$

Donc

$$Y = \sum_{n=1}^{+\infty} D^h(J_n(G)) = D^h G.$$

□

Corollaire 1.3.1.11. Soit $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ et $h \in H$ tels que $D^h u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Alors $\delta(u) \in \mathbb{D}^{h,2}$ et

$$D^h(\delta(u)) = \langle u, h\rangle + \delta(D^h u).$$

Comme pour l'intégration par parties avec la dérivée de Malliavin, nous avons une formule similaire pour calculer la divergence de Malliavin d'un produit.

Théorème 1.3.1.12. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ tel que $Fu \in L^2(\Omega, H)$ et $F\delta(u) = \langle DF, u\rangle \in L^2(\Omega)$. Alors $Fu \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H.$$

Démonstration. Soit $G \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle DG, Fu\rangle_H) &= \mathbb{E}(\langle FDG, u\rangle_H) = \mathbb{E}(\langle D(FG) - GDF, u\rangle_H) \\ &= \mathbb{E}(\langle D(FG), u\rangle_H) - G\langle DF, u\rangle_H) = \mathbb{E}(\delta(u)FG - G\langle DF, u\rangle_H) = \mathbb{E}(G(F\delta(u) - \langle DF, u\rangle)).\end{aligned}$$

Donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbb{E}(\langle DG, Fu\rangle_H)| \leq c \, \|G\|_2 \,,$$

avec c une constante dépendant de F, DF, u et $\delta(u)$. D'où $Fu \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle.$$

□

Corollaire 1.3.1.13. Soit $h \in H$ et $F \in \mathbb{D}^{h,2}$. Alors $Fh \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\delta(Fh) = FW(h) - \langle DF, h\rangle. = FW(h) - D^h F.$$

1.3.2 Dans le cadre $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$

On se replace dans le cadre usuel en pratique $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ avec μ une mesure σ-finie sans atome sur l'espace mesurable $(T, \mathcal{B})$.

Définition 1.3.2.1. Soit $u \in \mathrm{Dom}(\delta) \subset L^2(T \times \Omega)$. Alors la divergence $\delta(u)$ est appelée l'intégrale stochastique de Skorohod de u que l'on note

$$\delta(u) = \int_T u_t dW_t.$$

Remarque 1.3.2.2. Soit $u \in L^2(T \times \Omega)$. Alors on rappelle que, pour tout $t \in T$, u_t a une expansion en chaos de Wiener de la forme

$$u_t = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(\cdot, t)).$$

avec $f_n \in L^2(T^{n+1})$ symétrique en les n premières variables. De plus

$$\mathbb{E}\left(\int_T u_t^2 d\mu_t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^{n+1})} \,.$$

Définition 1.3.2.3. Soit $f \in L^2(T^{n+1})$ symétrique par rapport aux n premières variables. Alors on définit le symétrisé de f par

$$\tilde{f}(t_1, ..., t_n, t) = \frac{1}{n+1}\left(f(t_1, ..., t_n, t) + \sum_{i=1}^{n} f(t_1, ..., t_{i-1}, t, t_{i+1}, ..., t_n, t_i) \right).$$

A partir de la décomposition en chaos de Wiener de $u(t)$ on obtient une caractérisation de l'appartenance à $\mathrm{Dom}(\delta)$ de u et une expression simple simple de $\delta(u)$.

Proposition 1.3.2.4. Soit $u \in L^2(T \times \Omega)$ d'expansion en chaos de Wiener $u_t = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$. Alors on a $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$ et

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

Démonstration.
Sens direct : On suppose $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Alors, pour tout $G = I_n(g)$ avec $g \in L^2(T^n)$ symétrique,

$$\mathbb{E}(\delta(u)G) = \mathbb{E}(\langle DG, u\rangle) = \mathbb{E}\left(\int_T D_t G u_t d\mu_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_T n I_{n-1}(g(\cdot, t)) \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(f_m(\cdot, t))\mu(dt)\right).$$

Ainsi, par théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}(\delta(u)G) = \int_T n \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(I_{n-1}(g(\cdot, t)) I_m(f_m(\cdot, t))\right) \mu(dt).$$

Puis, par propriété des intégrales multiples I_m et I_n,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta(u)G) &= \int_T n(n-1)! \langle f_{n-1}(\cdot, t), g(\cdot, t)\rangle_{L^2(T^{m-1})} \mu(dt) \\ &= n! \langle f_{n-1}, g\rangle_{L^2(T^n)} \\ &= \mathbb{E}(I_n(\tilde{f}_{n-1} I_n(g)) \\ &= \mathbb{E}(I_n(\tilde{f}_{n-1})G). \end{aligned}$$

Ainsi $I_n(\tilde{f}_{n-1})$ coïncide avec la projection de $\delta(u)$ sur le chaos de Wiener d'ordre n. On en déduit donc que

$$\delta(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(\tilde{f}_{n-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

où la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$.

Sens indirect : Réciproquement on suppose la convergence dans $L^2(\Omega)$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ que l'on note V. Alors, pour tout $G = \sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)$,

$$\mathbb{E}\left(V \sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)\right) = \mathbb{E}\left(\int_T u_t D_t \left(\sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)\right) d\mu_t\right).$$

Ainsi, pour tout $F \in L^2(\Omega)$ avec une expansion finie en chaose de Wiener, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\mathbb{E}(\langle u, DF\rangle_{L^2(T)}\right| = \left|\mathbb{E}\left(\int_T u_t D_t F d\mu_t\right)\right| \leq \|V\|_2 \|F\|_2.$$

Donc également pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ par densité. Ainsi $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. $\square$

Corollaire 1.3.2.5. Le domaine Dom(δ) coïncide avec le sous-espace de $L^2(T \times \Omega)$ formé par les

$$u_t = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(\cdot, t)) \text{ tels que } \mathbb{E}(\delta(u)^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! \left\| \tilde{f}_n \right\|^2_{L^2(\Omega \times T)} < +\infty.$$

Nous allons à partir de maintenant considérer un espace dans lequel les processus ont leur dérivée de Malliavin intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \mu \otimes \mathbb{P}$.

Définition 1.3.2.6. L'espace $\mathbb{L}^{1,2}$ est l'ensemble des $u \in L^2(T \times \Omega)$ tels que $u_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour μ-presque tout $t \in T$ et

$$\mathbb{E}\left(\int_T \int_T (D_s u_t)^2 d\mu_s d\mu_t\right) < +\infty.$$

Remarque 1.3.2.7. On $\mathbb{L}^{1,2} \subset$ Dom(δ). De plus $\mathbb{L}^{1,2}$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|^2_{1,2,L^2(T)} = \|u\|^2_{L^2(T \times \Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(T^2 \times \Omega)}.$$

Et pour $u, v \in \mathbb{L}^{1,2}$, nous avons la relation particulière

$$\mathbb{E}\left(\int_T u_t dW_t \int_T v_t dW_t\right) = \mathbb{E}(\delta(u)\delta(v)) = \int_T \mathbb{E}(u_t v_t) d\mu_t + \int_T \int_T \mathbb{E}(D_s u_t D_t v_s) d\mu_s d\mu_t.$$

Exemple 1.3.2.8. Si $T = [0, T]$ avec $T \in \mathbb{R}^*_+$, μ la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ et u, v deux processus adaptés alors, d'après l'exemple 1.2.2.6, $D_s u_t = D_s v_t = 0$ dès que $s > t$, ainsi

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t dW_t \int_0^T v_t dW_t\right) = \int_0^T \mathbb{E}(u_t v_t) dt$$

ce qui coïncide avec la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô. Plus généralement nous allons voir que l'intégrale de Skohorod coïncide avec l'intégrale d'Itô dans le cas où le processus u est adapté.

Avec les notations de l'intégrale de Skohorod, nous avons la formule suivante.

Proposition 1.3.2.9. Soit $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ tel que, pour μ-presque tout $t \in T$, $(D_t u_s)_{s \in T} \in$ Dom(δ) et $\int_T Du_s dW_s \in L^2(T \times \Omega)$. Alors $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_t(\delta(u)) = u_t + \int_T D_t u_s dW_s.$$

Démonstration. Soit $h \in L^2(T)$. Alors $D^h u \in$ Dom(δ) d'après les hypothèses de la proposition, d'où, d'après le corollaire 1.3.1.11 et les hypothèses de la proposition,

$$\langle D(\delta(u)), h\rangle_{L^2(T)} = \langle u, h\rangle_{L^2(T)} + \delta(\langle Du, h\rangle_{L^2(T)}) = \langle u, h\rangle_{L^2(T)} + \int_T \langle D_t u, h\rangle_{L^2(T)} dW_t$$

$$= \langle u, h\rangle_{L^2(T)} + \int_T \int_T D_t u_s h_s d\mu_s dW_t = \langle u, h\rangle_{L^2(T)} + \int_T \left(\int_T D_t u_s dW_t\right) h_s d\mu_s.$$

Donc, dans $L^2(T)$,

$$D(\delta(u)) = u + \int_T Du_s dW_s.$$

□

Le résultat suivant justifie la notation de l'intégrale de Skohorod.

Théorème 1.3.2.10. On suppose que W est un movement brownien en dimension d et que l'espace H considéré est de la forme $L^2(T) = L^2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$. On considère $u \in L^2_a$ i.e. un processus adapté à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Alors $u \in$ Dom(δ) et $\delta(u)$ coïncide avec l'intégrale d'Itô de u contre le mouvement brownien :

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \int_0^T u_t^i dW_t^i = \int_0^T \langle u_t, dW_t\rangle.$$

Démonstration. On suppose u processus adapté élémentaire de la forme

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} F_j \mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}(t),$$

avec $F_j \in \mathbb{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable. Alors $F_j \mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]} \in \mathrm{Dom}(\delta)$ d'après le théorème 1.3.1.12, et

$$\delta(F_j \mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}) = F_j \delta(\mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}) - \langle DF_j, \mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}\rangle_{L^2([0,T])} = F_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} dW_t - \int_{t_j}^{t_{j+1}} D_t F_j dt.$$

Donc, par mesurabilité,

$$\delta(F_j \mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}) = F_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) - 0.$$

Puis, par densité, on obtient le même résultat avec $F_j \in L^2(\Omega)$, puis $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j(W_{t_{j+1}}) - W_{t_j}).$$

Pour conclure on considère une suite de processus adaptés $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme précédente qui converge vers $u \in L^2([0,T])$. Par conséquent, d'après l'égalité précédente, le caractère fermé de δ et les propriétés de l'intégrale stochastique, on en déduit que $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et $\delta(u)$ est égal à l'intégrale stochastique de u contre le mouvement brownien W. □

On obtient d'autres propriétés dans le cas où W est un mouvement brownien. Notamment la formule de Clark-Ocone qui permet d'obtenir une décomposition d'une variable aléatoire $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ faisant intervenir l'intégrale de Skohorod de la dérivée de Malliavin conditionnelle.

Définition 1.3.2.11. On définit $\mathbb{L}^{1,2,f}$ la fermuture de $\mathcal{S}_H$ pour la semi-norme définie par

$$\|u\|_{1,2,f}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^1 u_t^2 dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^1 \int_0^t (D_s u_t)^2 ds dt\right),$$

et $\mathbb{L}^F$ la fermeture de $\mathcal{S}_H$ pour la semi-norme définie par

$$\|u\|_F^2 = \|u\|_{1,2,f}^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^1 \int_0^t \int_0^t (D_r D_s u_t)^2 dr ds dt\right).$$

Remarque 1.3.2.12. Si $u \in L_a^2$ alors $u \in \mathbb{L}^F$ et pour tout $t \leq s$, $D_s u_t = 0$. De plus si $u \in \mathbb{L}^F$ alors $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et

$$\mathbb{E}(\delta(u)^2) \leq 2\|u\|_F^2.$$

Théorème 1.3.2.13. On suppose $H = L^2([0,1])$ et $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien en dimension 1. On considère $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors nous avons la formule de Clark-Ocone

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_t) dW_t.$$

Démonstration. On écrit l'expansion en chaos de Wiener de F :

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n).$$

Alors, d'après la proposition 1.2.2.2,

$$D_t F = \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot,t)).$$

Donc, d'après le lemme 1.2.2.3,

$$\mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{E}(I_{n-1}(f_n(\cdot,t)) \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot,t)\mathbb{1}_{\{t_i\leq t, \forall i\in [\![1,n-1]\!]\}}).$$

Ainsi, d'après la proposition 1.3.2.4,

$$\delta\left(\mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_t)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(f_n) = F - \mathbb{F}(F),$$

ce qui donne le résultat voulu par correspondance entre l'intégrale d'Itô et la divergence de Malliavin. □

1.4 Propriétés locales

Nous allons dans cette sous-section raisonner avec des propriétés vraies seulement sur un événement et nous allons en déduire des propriétés sur la divergence ou la dérivée de Malliavin sur cet événement.

Lemme 1.4.0.1. On considère $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), g \in C_c^\infty(\mathbb{R}),\ h_1, ..., h_n \in H,\ u \in \mathbb{L}^{1,2}$ et

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)).$$

Alors

$$Fg(\|u\|_H^2) \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et

$$D(Fg(\|u\|_H^2)) = g(\|u\|_H^2)DF + 2Fg'(\|u\|_H^2)\langle Du, u\rangle_H = DFg(\|u\|_H^2) + 2Fg'(\|u\|_H^2)D^u u.$$

Démonstration. Nous avons par dérivation de Malliavin d'un produit $Fg(\|u\|_H^2) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D(Fg(\|u\|^2)) = g(\|u\|_H^2)DF + FD(g(\|u\|_H^2)),$$

avec, par règle de la chaîne,

$$D(g(\|u\|_H^2)) = g'(\|u\|_H^2)D(\|u\|_H^2) = 2g'(\|u\|_H^2)\langle Du, u\rangle_H.$$

□

Proposition 1.4.0.2. Soit $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ et $A \in \mathcal{F}$ tels que $u_{|A} = 0$. Alors $(\delta(u))_{|A} = 0$.

Démonstration. On se place sur l'événement A. On considère $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ h_1, ..., h_n \in H$ et

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)).$$

Nous voulons montrer que

$$\delta(u)\mathbb{1}_A \overset{PS}{=} 0.$$

Or sur A nous avons $u = 0$ i.e. $\|u\|_H = 0$, donc nous voulons montrer que

$$\delta(u)\mathbb{1}_{\{0\}}(\|u\|_H) = \delta(u)\delta_0(\|u\|_H) = 0.$$

On considère alors $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ une approximation de l'unité δ_0, i.e.

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

avec $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ de support inclus dans $[-1, 1]$ et $\phi(0) = 1$. Alors, d'après le lemme précédent,

$$F\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2) \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et

$$D(F\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2)) = DF\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2) + 2F\phi'_\varepsilon(\|u\|_H^2)D^u u.$$

Ainsi, par définition par dualité de δ,

$$\mathbb{E}\left(\delta(u)\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2)F\right) = \mathbb{E}\left(\langle u, D(F\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2))\rangle_H\right) = \mathbb{E}\left(\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2)\langle u, DF\rangle_H\right) + 2\mathbb{E}\left(F\phi'_\varepsilon(\|u\|_H^2)\langle u, D^u u\rangle_H\right).$$

Or

$$\phi_\varepsilon(\|u\|_H^2)\langle u, DF\rangle_H + 2F\phi'_\varepsilon(\|u\|_H^2)\langle u, D^u u\rangle_H \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{PS}{\longrightarrow}} \delta_0(\|u\|_H^2)\langle u, DF\rangle_H + 0 = 0.$$

De plus

$$|\phi_\varepsilon(\|u\|^2)\langle u, DF\rangle_H| \leq \|\phi\|_\infty \|u\|_H \|DF\|_H \in L^1(\Omega),$$

et

$$|\phi'_\varepsilon(\|u\|_H^2)\langle u, D^u u\rangle| \leq |\phi'_\varepsilon(\|u\|_H^2)\, \|u\|^2\, \|Du\|_{H\otimes H} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x\phi'_\varepsilon(x)|\, \|Du\|_{H\otimes H}\, \|\phi'\|_\infty\, \|Du\|_{H\otimes H} \in L^1(\Omega).$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}(\delta(u)\delta_0(\|u\|_H)F) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout F, on en déduit que

$$\delta(u)\delta_0(\|u\|_H) = 0.$$

□

Proposition 1.4.0.3. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,1}$ et $A \in \mathcal{F}$ tels que $F_{|A} = 0$ presque sûrement. Alors $(DF)_{|A} = 0$ presque sûrement.

Démonstration. Quitte à considérer $\arctan(F)$, on peut supposer F bornée i.e.

$$F \in \mathbb{D}^{1,1} \cap L^{\infty}(\Omega).$$

Montrons que

$$\mathbb{1}_A DF = 0.$$

Or $F = 0$ sur A, donc il suffit de montrer

$$\delta_0(F)DF = 0.$$

Considérons la même approximation de l'unité qu'à la démonstration précédente $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$. Posons

$$\psi_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\cdot} \phi_\varepsilon(y)dy.$$

Alors, d'après la règle de la chaîne, $\psi_\varepsilon(F) \in \mathbb{D}^{1,1}$ et

$$D\psi_\varepsilon(F) = \phi_\varepsilon(F)DF.$$

Considérons $F_1, ..., F_n \in \mathcal{S}_b, h_1, ..., h_n \in H$ et

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j.$$

Alors

$$|\mathbb{E}(\phi_\varepsilon(F)\langle DF, u\rangle_H)| = |\mathbb{E}\left(\langle D(\psi_\varepsilon(F)), u\rangle_H\right)| = |\mathbb{E}(\psi_\varepsilon(F)\delta(u))| \leq \|\psi_\varepsilon\|_\infty \mathbb{E}(|\delta(u)|),$$

avec, par changement de variable $z = \frac{y}{\varepsilon}$,

$$|\psi_\varepsilon(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} \phi_\varepsilon(y)dy\right| = \varepsilon \left|\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \phi(z)dz\right| \leq \varepsilon \int_{-1}^{1} |\phi(z)|dz \leq 2\varepsilon \|\phi\|_\infty.$$

Donc

$$|\mathbb{E}(\phi_\varepsilon(F)\langle DF, u\rangle_H)| \leq 2\varepsilon \|\phi\|_\infty \mathbb{E}(|\delta(u)|) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}(\delta_0(F)\langle DF, u\rangle_H) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j$, on en déduit par densité que

$$\delta_0(F)DF = 0.$$

□

Remarque 1.4.0.4. Soit $(W_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien en dimension 1, $u \in \mathbb{L}^F$ et $A \in \mathcal{F}$ tels que $u = 0$ presque sûrement sur $[0, T] \times A$. Alors de même, en utilisant des propriétés de l'intégrale d'Itô, on obtient $(\delta(u))_{|A} = 0$ presque sûrement.

Nous pouvons également définir la dérivée de Malliavin locale à condition de travailler sur de bons sous-ensemble de notre univers Ω.

Définition 1.4.0.5. Soit V est un espace de variables aléatoires. Alors on définit V_{loc} comme l'ensemble des variables F tel qu'il existe $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ et $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\Omega_n \underset{n \to +\infty}{\nearrow} \Omega \text{ et } F_{|\Omega_n} = F_n.$$

Exemple 1.4.0.6. Pour $V = \mathbb{D}^{1,p}$, la dérivée DF de $F \in \mathbb{D}^{1,p}_{loc}$ est défini, sans ambiguïté, par

$$(DF)_{|\Omega_n} = DF_n.$$

Proposition 1.4.0.7. Soit $(W(t))_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien de dimension 1 et u un processus adapté tel que $\displaystyle\int_0^1 u_t^2 dt < +\infty$ presque sûrement. Alors $u \in \mathbb{L}^F_{loc}$ et

$$\delta(u) = \int_0^1 u_t dW_t.$$

Démonstration. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [-1,1])$ tel que

$$(\varphi_k)_{|[-k,k]} = 1, (\varphi_k)_{]-\infty,-(k+1)[\cup]k+1,+\infty[} = 0.$$

On considère également

$$u_t^k = u_t \varphi_k \left(\int_0^t u_s^2 ds \right),$$

et

$$\Omega_k = \left\{ \int_0^1 u_s^2 ds \leq k \right\}.$$

Alors

$$\Omega_k \underset{k\to+\infty}{\nearrow} \Omega,$$

$$u_{|[0,1]\times\Omega_k} = u^k_{|[0,1]\times\Omega_k},$$

et $u^k \in L_a^2$ car le processus u est adapté et

$$\int_0^1 (u_t^k)^2 dt = \int_0^1 u_t^2 \varphi_k \left(\int_0^t u_s^2 ds \right)^2 dt \leq \int_0^1 u_t^2 dt < +\infty.$$

Par conséquent $u^k \in \mathbb{L}^F$ d'après la remarque 1.3.2.12. Puis $u \in \mathbb{L}^F_{loc}$. De plus, comme $u^k \in L_a^2$,

$$\delta(u^k) = \int_0^1 u_t^k dW_t.$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient le résultat souhaité. □

Terminons cette section par un critère de dérivabilité de Malliavin d'une intégrale d'Itô à partir de la dérivabilité de Malliavin de l'intégrant.

Proposition 1.4.0.8. Soit $(W_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien de dimension 1, $(u_t)_{t\in[0,1]}$ un processus adapté de carré intégrable et

$$X_t := \int_0^t u_s dW_s.$$

Alors $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ si et seulement si $X_1 \in \mathbb{D}^{1,2}$. Dans ce cas $X \in \mathbb{L}^{1,2}$ et, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\int_0^t \mathbb{E}((D_s X_t)^2) ds = \int_0^t \mathbb{E}(u_s^2) ds + \int_0^t \int_0^s \mathbb{E}((D_r u_s)^2) dr ds.$$

Démonstration. On suppose $u \in \mathbb{L}^{1,2}$. Alors le processus $(D_t u_s)_{0\leq s\leq 1}$ est Skorohod-intégrable car est adapté et de carré intégrable donc son intégrale de Skohorod coïncide avec son intégrale d'Itô. De plus, par isométrie d'Itô,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 D_t u_s dW_s \right)^2 dt \right) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}((D_t u_s)^2) ds dt < +\infty.$$

Ainsi, d'après la proposition 1.3.2.9, $X_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_s X_t = u_s \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} + \int_0^t D_s u_r dW_r = u_s \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} + \int_s^t D_s u_r dW_r.$$

Ainsi
$$(D_s X_t)^2 = u_s^2 \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} + 2u_s \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \int_s^t D_s u_r dW_r + \left(\int_s^t D_s u_r dW_r \right)^2 .$$
D'où le résultat en appliquant l'espérance, par isométrie et comme l'intégrale d'Itô est une martingale issue de 0. $\square$

2 Premières utilisations du calcul de Malliavin

2.1 Semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck

Une première utilisation des opérateurs de dérivation et de divergence de Malliavin est une expression plus simple du générateur du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Commençons par rappeler ce qu'est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck et ensuite nous verrons comment l'exprimer à partir de la dérivée et de la divergence de Malliavin.

2.1.1 Le semi-groupe

Définition 2.1.1.1. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est le semi-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'opérateurs contractifs sur $L^2(\Omega)$ définis par

$$\forall F \in L^2(\Omega), \quad T_t(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} J_n(F).$$

Remarque 2.1.1.2. L'opérateur T_t peut aussi être défini sur $L^p(\Omega)$ par, pour tout $F \in L^p(\Omega)$, comme $\mathcal{F}$ engendrée par W, il existe $\psi_F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $F = \psi_F \circ W$,

$$T_t(F) = \mathbb{E}'(\psi_F(e^{-t}W + \sqrt{1-e^{-2t}}W')),$$

avec W' une copie indépendante de W définie sur $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.

Proposition 2.1.1.3. Les opérateurs T_t vérifient :

1. la positivité
$$\forall F \in L^2(\Omega), F \geq 0 \Longrightarrow T_t(F) \geq 0.$$
2. la symétrie
$$\forall F, G \in L^2(\Omega), \quad \mathbb{E}(GT_t(F)) = \mathbb{E}(FT_t(G)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\mathbb{E}(J_n(F)J_n(G)).$$

Démonstration.

1. Soit $F = \psi_F \circ W \in L^2(\Omega)$ positive. Alors
$$T_t(F) = \mathbb{E}'(\underbrace{\psi_F(e^{-t} + \sqrt{1-2e^{-2t}}W')}_{\geq 0}) \geq 0.$$
2. Soit $F, G \in L^2(\Omega)$. Alors
$$\mathbb{E}(GT_t(F)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\mathbb{E}(GJ_n(F)),$$
avec, comme les chaos de Wiener sont en domme directe orthogonale,
$$\mathbb{E}(GJ_n(F)) = \langle G, J_n(F)\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{+\infty} J_n(G), J_n(F) \right\rangle = \langle J_n(G), J_n(F)\rangle = \mathbb{E}(J_n(G)J_n(F)),$$
et par symétrie des rôles de F et G,
$$\mathbb{E}(GJ_n(F)) = \mathbb{E}(J_n(G)J_n(F)) = \mathbb{E}(FJ_n(G)).$$
D'où
$$\mathbb{E}(GT_t(F)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\mathbb{E}(J_n(F)J_n(G)) = \mathbb{E}(FT_t(G)).$$

□

Remarque 2.1.1.4. Le semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck est très lié au processus gaussien centré $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de fonction de covariance $K(s,t) = e^{-|s-t|}$, appelé processus d'Orstein-Uhlenbeck. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}$ et $F = \psi_F \circ W \in L^2(\Omega)$, on a

$$(T_tF)(X_s) := \psi_{T_tF} \circ X_s = \mathbb{E}(\psi_F(X_{s+t}) \mid \tilde{F_s}) =: \mathbb{E}(F(X_{s+t}) \mid \mathcal{F}_s).$$

2.1.2 Le générateur

Définition 2.1.2.1. On définit l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck L par

$$L(F) = -\sum_{n=0}^{+\infty} nJ_n(F)$$

sur

$$\mathrm{Dom}(L) = \left\{ F \in L^2(\Omega), \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left\| J_n(F) \right\|_2^2 < +\infty \right\}.$$

Définition 2.1.2.2. On définit le générateur infinitésimal A du semi-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par

$$A(F) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t(F) - F}{t}$$

sur

$$\mathrm{Dom}(A) = \left\{ F \in L^2(\Omega), \exists G \in L^2(\Omega), \lim_{t\to 0} \left\| \frac{T_t(F) - F}{t} - G \right\|_2 = 0 \right\}.$$

Proposition 2.1.2.3. L'opérateur L coïncide avec A :

$$(L, \mathrm{Dom}(L)) = (A, \mathrm{Dom}(A)).$$

Démonstration. Soit $F \in L^2(\Omega)$. On suppose $F \in \mathrm{Dom}(L)$. Alors, par définitions de T_tF et de $L(F)$,

$$\mathbb{E}\left(\left| \frac{1}{t}(T_tF - F) - L(F) \right|^2 \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{t}(e^{-nt} - 1) + n \right)^2 \mathbb{E}(|J_n(F)|^2),$$

avec par développement limité de l'exponentielle,

$$\frac{1}{t}(e^{-nt} - 1) + n \overset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left(-nt + \frac{n^2t^2}{2} + o(t^2) \right) + n = \frac{nt}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$\left(\frac{1}{t}(e^{-nt} - 1) + n \right)^2 \mathbb{E}(|J_n(F)|^2) \leq 2n\mathbb{E}(|J_n(F)|^2)$$

terme d'une série convergente. Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left(\left| \frac{1}{t}(T_tF - F) - L(F) \right|^2 \right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où $F \in \mathrm{Dom}(A)$ et $A(F) = L(F)$.
Réciproquement on suppose $F \in \mathrm{Dom}(A)$ et on note $G = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_tF - F) = A(F) \in L^2(\Omega)$. Alors, par continuité et linéarité de J_n,

$$J_nG = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(J_n(T_tF) - J_n(F)),$$

avec

$$J_n(T_tF) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-mt} J_m(J_n(F)) = e^{-nt} J_n(F).$$

Donc

$$J_nG = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-nt} - 1}{t} J_n(F) = -nJ_n(F).$$

Ainsi $F \in \mathrm{Dom}(L)$ et

$$L(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n(G) = G = A(F).$$

□

Proposition 2.1.2.4. Soit $F \in L^2(\Omega)$. Alors $F \in \mathrm{Dom}(L)$ si et seulement si $F \in \mathrm{Dom}(\delta D)$ i.e. $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $DF \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Dans ce cas
$$L(F) = -\delta(D(F)).$$

Démonstration. On suppose $F \in \mathrm{Dom}(\delta D)$. Soit $G \in \mathcal{H}_n$. Alors, par polarisation de la formule obtenue à la proposition 1.2.1.21,

$$\mathbb{E}(G\delta(D(F))) = \mathbb{E}(\langle DG, DF\rangle_H) = n\mathbb{E}(GJ_n(F)).$$

En effet, on a

$$\mathbb{E}(\langle DG, DF\rangle_H) = \sum_{m=1}^{+\infty} m\mathbb{E}(J_m(G)J_m(F)) = n\mathbb{E}(J_n(G)J_n(F)) = n\mathbb{E}(GJ_n(F)).$$

Donc
$$J_n(\delta(D(F))) = nJ_n(F).$$

Ainsi $F \in \mathrm{Dom}(L)$ et
$$\delta(D(F)) = -L(F).$$

Réciproquement on suppose $F \in \mathrm{Dom}(L)$. Alors on a directement $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, et pour tout $G \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$\mathbb{E}(\langle DG, DF\rangle_H) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(J_n(G)J_n(F)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(GJ_n(F)) = -\mathbb{E}(GL(F)).$$

Ainsi $DF \in \mathrm{Dom}(\delta)$ et
$$\delta(D(F)) = -L(F).$$

□

A partir de cette formulation du générateur L, nous pouvons en déduire des expressions intéressantes de $L(F)$ et de $L(\varphi(F))$.

Proposition 2.1.2.5. Si $\mathcal{S} \subset \mathrm{Dom}(L)$ alors, pour tout $F = f(W(h_1), ..., W(h_n)) \in \mathcal{S}$,

$$L(F) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(W(h_1), ..., W(h_n))\langle h_i, h_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n))W(h_i).$$

Démonstration. On a directement par définition de $\mathbb{D}^{1,2}$,

$$F \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et
$$DF = \sum_{i=1}^{n}\partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n))h_i.$$

Ainsi, d'après la propriété 4 de la proposition 1.3.1.7,

$$\delta(D(F)) = \sum_{i=1}^{n}\partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n))W(h_i) - \sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_i\partial_j f(W(h_1), ..., W(h_n))\langle h_i, h_j\rangle_H.$$

On en déduit le résultat d'après la proposition précédente. □

Proposition 2.1.2.6. Soit $F = (F^1, ..., F^m) \in (\mathbb{D}^{2,4})^m$ et $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^m)$ avec des dérivées partielles premières et secondes bornées. Alors $\varphi(F) \in \mathrm{Dom}(L)$ et

$$L(\varphi(F)) = \sum_{i,j=1}^{m}\partial_i\partial_j\varphi(F)\langle DF^i, DF^j\rangle + \sum_{j=1}^{m}\partial_i\varphi(F)L(F^i).$$

Démonstration. On se limite au cas $m = 1$, le cas général se traite de la même manière. On suppose que $F = f(W(h_1), ..., W(h_n)) \in \mathcal{S}$ et $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R})$. Alors $\varphi \circ f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ et, d'après la proposition précédente,

$$L(\varphi(F)) = \sum_{1 \le i,j \le n} \partial_i \partial_j (\varphi \circ f)(W(h_1), ..., W(h_n)) \langle h_i, h_j \rangle_H - \sum_{i=1}^n \underbrace{\partial_i (\varphi \circ f)}_{=\varphi' \circ f \times \partial_i f} (W(h_1), ..., W(h_n)) W(h_i),$$

avec

$$\partial_i \partial_j (\varphi \circ f) = \varphi'' \circ f \times \partial_i f \times \partial_j f + \varphi' \circ f \times \partial_i \partial_j f.$$

Donc, en réutilisant la proposition précédente avec $L(F)$,

$$\begin{aligned} L(\varphi(F)) &= \varphi''(F) \sum_{1 \le i,j \le n} (\partial_i f \times \partial_j f)(W(h_1), ..., W(h_n)) \langle h_i, h_j \rangle_H \\ &\quad + \varphi'(F) \sum_{1 \le i,j \le n} \partial_i \partial_j f(W(h_1), ..., W(h_n)) \langle h_i, h_j \rangle_H \\ &\quad - \varphi'(F) \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n)) W(h_i) \\ &= \varphi''(F) \langle DF, DF \rangle + \varphi'(F) LF. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat général par densité et continuité de L comme composé de telles applications. □

2.2 Introduction d'un modèle financier

On considère un marché composé d'un actif risqué et d'un actif non risqué. Le prix de l'actif risqué est supposé de la forme

$$S_t = S_0 e^{h_t}, \quad t \in [0, T],$$

avec

$$h_t = \int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T],$$

où μ est son taux d'intérêt et σ sa volatilité. On considère également un actif non risqué dont le prix est supposé de la forme

$$B_t = \exp \left(\int_0^t r_t dt \right), t \in [0, T],$$

où r est son taux d'intérêt.

Proposition 2.2.0.1. Le processus du prix $(S_t)_{t \in [0,T]}$ vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t.$$

Démonstration. D'après la formule d'Itô, nous avons

$$S_t = S_0 + \int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) S_s ds + \int_0^t \sigma_s S_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 S_s ds = S_0 + \int_0^t \mu_s S_s ds + \int_0^t \sigma_s S_s dW_s.$$

□

On considère un investisseur qui commence avec une richesse $x \in \mathbb{R}_+$ et investit dans les actifs risqué et non risqué. On note α_t le nombre d'actifs non risqués et β_t celui de risqués. Le couple $\phi_t = (\alpha_t, \beta_t)$ est appelé la stratégie financière de l'investisseur. On suppose que les processus α et β soient mesurables adaptés et, $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$\int_0^T |\alpha_t| dt < +\infty, \int_0^T (\beta_t)^2 dt < +\infty.$$

En particulier nous avons la relation

$$x = \alpha_0 B_0 + \beta_0 S_0 = \alpha_0 + \beta_0 S_0,$$

et la richesse totale de l'investisseur à l'instant t est donnée par

$$V_t(\phi) = \alpha_t B_t + \beta_t S_t.$$

On suppose que la stratégie est auto-financée, i.e. qu'il n'y a ni apports ni dépenses, i.e.

$$V_t(\phi) = x + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s dS_s.$$

On introduit le prix réduit associés aux actifs

$$\tilde{S}_t = B_t^{-1} S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu_s - r_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s W_s\right),$$

et la valeur réduite du portefeuille

$$\tilde{V}_t(\phi) = B_t^{-1} V_t(\phi) = \alpha_t + \beta_t \tilde{S}_t.$$

Proposition 2.2.0.2. Nous avons la relation

$$\tilde{V}_t(\phi) = x + \int_0^t (\mu_s - r_s)\beta_s \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \beta_s \tilde{S}_s dW_s.$$

Démonstration. Par intégration par parties stochastique, nous avons

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t B_s^{-1} dV_s(\phi) + \int_0^t V_s(\phi) d(B_s^{-1}) + \langle B^{-1}, V(\phi)\rangle_t,$$

avec

$$\tilde{V}_0(\phi) = \alpha_0 + \beta_0 \tilde{S}_0 = \alpha_0 + \beta_0 S_0 = x,$$
$$dV_s(\phi) = \alpha_s dB_s + \beta_s dS_s = r_s \alpha_s B_s ds + \mu_s \beta_s S_s ds + \sigma_s \beta_s S_s dW_s,$$
$$d(B_s^{-1}) = -r_s B_s^{-1} ds,$$

et, comme B est déterministe,

$$\langle B^{-1}, V(\phi)\rangle_t = 0.$$

Donc

$$\tilde{V}_t(\phi) = x + r\int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \mu_s \beta_s \underbrace{B_s^{-1} S_s}_{=\tilde{S}_s} ds + \int_0^t \sigma_s \beta_s \underbrace{B_s^{-1} S_s}_{=\tilde{S}_s} dW_s - \int_0^t r_s \underbrace{V_s(\phi) B_s^{-1}}_{=\alpha_s + \beta_s \tilde{S}_s} ds.$$

Ainsi

$$\tilde{V}_t(\phi) = x + \int_0^t (r_s - \mu_s)\beta_s \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \beta_s \tilde{S}_s dW_s.$$

□

Corollaire 2.2.0.3. La quantité α_t d'actifs non risqués vérifie la relation

$$\alpha_t = \tilde{V}_t(\phi) - \beta_t \tilde{S}_t = x + \int_0^t \beta_s d\tilde{S}_s - \beta_t \tilde{S}_t.$$

Corollaire 2.2.0.4. Si $\mu = r$ alors

$$\tilde{V}_t(\phi) = x + \int_0^t \sigma_s \beta_s \tilde{S}_s dW_s$$

est une martingale locale.

Proposition 2.2.0.5. Soit h une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_T$ mesurable telle que

$$\mathbb{E}(B_T^{-1} Z_T^2 h^2) < +\infty,$$

avec

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right), \quad \theta = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Alors il existe une stratégie ϕ auto-financée telle que

$$V_T(\phi) = h.$$

Démonstration. Comme $\mathbb{E}(B_T^{-1} Z_T^2 h^2) < +\infty$, d'après le théorème de représentation, il existe un processus mesurable adapté $(u_t)_{t\in[0,T]}$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_s^2 ds\right) < +\infty,$$

et

$$B_T^{-1} Z_T h = \mathbb{E}(B_T^{-1} Z_T h) + \int_0^t u_s dW_s.$$

On pose

$$M_t = \mathbb{E}(B_T^{-1} Z_T h \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_T^{-1} Z_T h) + \int_0^t u_s dW_s,$$

et on considère la stratégie $\phi = (\alpha, \beta)$ définie par

$$\beta_t = \frac{Z_t^{-1}(u_t + M_t \theta_t)}{\sigma_t \tilde{S}_t},$$

$$\alpha_t = M_t Z_t^{-1} - \beta_t \tilde{S}_t.$$

On aura alors ϕ auto-financée et

$$V_T(\phi) = H.$$

□

Corollaire 2.2.0.6. Dans ce cas nous avons la relation

$$V_t(\phi) = Z_t^{-1} \mathbb{E}\left(Z_T e^{-\int_t^T r_s ds} h \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Corollaire 2.2.0.7. Si $\mathbb{E}(Z_T) = 1$ alors on peut considérer la probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}.$$

Ainsi

$$V_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} h \mid \mathcal{F}_t\right).$$

En particulier

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r_s ds} h\right)$$

Exemple 2.2.0.8. Dans le modèle de Black-Scholes, on suppose que les fonctions μ, σ et r sont constantes. On considère également une option européenne i.e.

$$h = \Phi(S_T).$$

Alors la stratégie $\phi = (\alpha, \beta)$ atteignant $h = \Phi(S_T)$ vérifie

$$\begin{aligned} \beta_t &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \\ \alpha_t &= e^{-rt}(F(t, S_t) - \beta_t S_t), \end{aligned}$$

avec

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Phi\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right),$$

et $\tilde{W}_t = W_t + \theta t$ mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

2.3 Calcul de Greeks par intégration par parties

Dans cette section nous nous intéresserons à des quantités retranscrivant la stabilité d'une option financière par rapport à des paramètres du problème, par exemple à la valeur initiale d'une action ou à sa volatilité. Pour se faire nous allons avoir besoin d'une formule d'intégration par parties.

2.3.1 Formule d'intégration par parties

On considère H un espace de Hilbert, $(W(h))_{h\in H}$ un processus isonormal et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par W.

Théorème 2.3.1.1. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, G une variable aléatoire réelle et u une variable aléatoire à valeurs dans H telle que

$$D^u F := \langle DF, u\rangle \overset{PS}{\neq} 0,$$

et

$$G(D^u F)^{-1}u \in \mathrm{Dom}(\delta).$$

Alors, pour tout $f \in C^1(\mathbb{R})$ de fonction dérivée bornée,

$$\mathbb{E}(f'(F)G) = \mathbb{E}(f(F)H(F,G)),$$

avec

$$H(F,G) = \delta\left(G(D^u F)^{-1}u\right).$$

Démonstration. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ de fonction dérivée bornée. Alors, d'après la règle de la chaîne, on a $f(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D^u(f(F)) = \langle D(f(F)), u\rangle = \langle f'(F)DF, u\rangle = f'(F)D^u F.$$

Donc, comme $D^u F \overset{PS}{\neq} 0$,

$$\mathbb{E}(f'(F)G) = \mathbb{E}(D^u(f(F))(D^u F)^{-1}G) = \mathbb{E}(\langle D(f(F)), G(D^u F)^{-1}u\rangle).$$

Ainsi, d'après la définition par dualité de δ, comme $G(D^u F)^{-1}u \in \mathrm{Dom}(\delta)$,

$$\mathbb{E}(f'(F)G) = \mathbb{E}(f(F)\delta(G(D^u F)^{-1}u)).$$

□

Définition 2.3.1.2. Un Greek est la sensibilité d'un produit dérivée d'une quantité financière en fonction des paramètres du modèle.

Remarque 2.3.1.3. Un Greek est utile pour mesurer la stabilité de la quantité financière quand les paramètres varient.

Corollaire 2.3.1.4. Si on considère le modèle de Black-Scholes avec une option de profit $h \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}$ est la mesure martingale i.e. la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le processus de prix réduit soit une martingale. Alors la valeur du portefeuille au temps $t = 0$ est donné par

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h),$$

avec T le temps final et r le taux d'intérêt de l'actif non risqué. On suppose alors que h s'écrit $h = f(F_\alpha)$ avec α un des paramètres du problème, comme par exemple S_0 le prix de l'actif risqué à l'instant initial, σ la volatilité de cet actif ou r le taux d'intérêt.
Alors

$$\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(f'(F_\alpha)\frac{dF_\alpha}{d\alpha}\right) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(f(F_\alpha)H\left(F_\alpha, \frac{dF_\alpha}{d\alpha}\right)\right).$$

2.3.2 Calcul de Greeks pour des options européennes

On considère $H = L^2([0,T])$.

Définition 2.3.2.1. Le Delta est la dérivée de V_0 par rapport au paramètre $\alpha = S_0$ le prix initial de l'action

$$\Delta = \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial V_0}{\partial S_0}.$$

Définition 2.3.2.2. Une option européenne dérivée est une option dont le profit h ne dépend que de la valeur de l'action à l'instant final T

$$h = \phi(S_T).$$

Remarque 2.3.2.3. Δ coïncide avec la composition en actifs risqués à l'instant initial

$$\Delta = \frac{\partial(\alpha_0 B_0 + \beta_0 S_0)}{\partial S_0} = \beta_0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0, S_0).$$

Proposition 2.3.2.4. Si $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ de dérivée bornée et $S_T \in \mathbb{D}^{1,2}$ alors

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(S_T)W(T)).$$

Démonstration. On a

$$\Delta = \frac{\partial V_0}{\partial S_0} = \frac{\partial}{\partial S_0}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}h)\right) = \frac{\partial}{\partial S_0}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}\phi(S_T))\right) = e^{-rT}\frac{\partial}{\partial S_0}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(S_T))\right).$$

Puis, comme ϕ est de dérivée bornée, on peut appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour obtenir

$$\Delta = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial S_0}\right).$$

Or, par hypothèse du problème,

$$S_t = S_0 e^{h_t},$$

avec

$$h_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t).$$

Donc

$$\frac{\partial S_T}{\partial S_0} = e^{h_T} = \frac{S_T}{S_0},$$

et

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi'(S_T)S_T\right).$$

Or, pour $u = 1$, on a

$$D^u S_T = \langle DS_T, u\rangle_H = \int_0^T D_t S_T dt,$$

avec, par règle de la chaîne et l'expression de h_T,

$$D_t S_T = S_0 D_t(e^{h_T}) = S_0 e^{h_t} D_t h_T = S_T \sigma.$$

Ainsi

$$D^u S_T = \sigma T S_T \overset{PS}{\neq} 0.$$

De plus, avec $F = G = S_T$,

$$G(D^u F)^{-1}u = S_T(\sigma T S_T)^{-1} = \sigma^{-1}T^{-1} \in \mathbb{R} \subset \mathrm{Dom}(\delta).$$

On peut donc appliquer le théorème précédent pour obtenir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi'(S_T)S_T) = \mathbb{E}(\phi(S_T)H(S_T, S_T)),$$

avec

$$H(S_T, S_T) = \delta\left(\sigma^{-1}T^{-1}\right) = \sigma^{-1}T^{-1}\delta(1) = \sigma^{-1}T^{-1}\int_0^T 1 dW_t = \sigma^{-1}T^{-1}W(T).$$

Par conséquent on a bien

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(S_T)W(T)).$$

□

Définition 2.3.2.5. Le Gamma est la dérivée seconde de V_0 par rapport au paramètre $\alpha = S_0$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V_0}{\partial S_0^2}.$$

Proposition 2.3.2.6. Si $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ de dérivée et de dérivée seconde bornées et $S_T \in \mathbb{D}^{1,2}$ alors

$$\Gamma = \frac{e^{-rT}}{S_0^2 \sigma T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\phi(S_T) \left(\frac{W(T)^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W(T) \right) \right).$$

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, par théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V_0}{\partial S_0^2} = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{\partial}{\partial S_0} \left(\phi'(S_T) \frac{\partial S_T}{\partial S_0} \right) \right) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\phi''(S_T) \left(\frac{\partial S_T}{\partial S_0} \right)^2 + \phi'(S_T) \frac{\partial^2 S_T}{\partial S_0^2} \right).$$

Or, comme $S_t = S_0 e^{h_t}$,

$$\frac{\partial S_T}{\partial S_0} = e^{h_T} = \frac{S_T}{S_0}, \quad \frac{\partial^2 S_T}{\partial S_0^2} = 0,$$

et

$$\Gamma = \frac{e^{-rT}}{S_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\phi''(S_T) S_T^2 \right).$$

De plus

$$S_T^2 (D^1 S_T)^{-1} = S_T^2 \left(\int_0^T D_t S_T dt \right)^{-1} = \frac{S_T}{\sigma T} \in \mathbb{D}^{1,2},$$

d'où

$$S_T^2 (D^1 S_T)^{-1} 1_{L^2([0,T])} \in \mathrm{Dom}(\delta).$$

Par conséquent, d'après le théorème 2.3.1.1,

$$\mathbb{E}(\phi''(S_T) S_T^2) = \mathbb{E}(\phi'(S_T) H(S_T, S_T^2)),$$

avec, en utilisant une propriété de la divergence de Malliavin

$$H(S_T, S_T^2) = \delta(S_T^2 (D^1 S_T)^{-1} 1_{L^2([0,T])}) = \delta \left(\frac{S_T}{\sigma T} \right) = \frac{S_T}{\sigma T} \delta(1) - \int_0^T D_t \left(\frac{S_T}{\sigma T} \right) dt = \frac{S_T W_T}{\sigma T} - S_T.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi''(S_T) S_T^2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\phi'(S_T) S_T \left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1 \right) \right).$$

On utilise encore le théorème 2.3.1.1 avec $G = S_T \left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1 \right), F = S_T \in \mathbb{D}^{1,2}, u = 1$ et

$$\delta \left(S_T \left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1 \right) \left(\int_0^T D_t S_T dt \right)^{-1} \right) = \delta \left(\frac{W_T}{\sigma^2 T^2} - \frac{1}{\sigma T} \right) = \frac{1}{\sigma^2 T^2} \delta(W_T) - \frac{1}{\sigma T} \delta(1)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 T^2} \left(W_T \delta(1) - \int_0^T D_t W_T dt \right) - \frac{W_T}{\sigma T} = \frac{W_T^2}{\sigma^2 T^2} - \frac{1}{\sigma^2 T} - \frac{W_T}{\sigma T}.$$

Par conséquent on obtient le résultat souhaité. □

Définition 2.3.2.7. Le Vega est la dérivée de V_0 par rapport à $\alpha = \sigma$ la volatilité

$$\vartheta = \frac{\partial V_0}{\partial \sigma}.$$

Proposition 2.3.2.8. Si ϕ de classe C^1 de dérivée bornée et $S_T \in \mathbb{D}^{1,2}$ alors

$$\vartheta = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\phi(S_T) \left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W_T \right) \right).$$

Démonstration. Comme précédemment,

$$\vartheta = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi'(S_T)S_T(W_T - \sigma T)).$$

Puis il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1.1 avec $G = S_T(W_T - \sigma T), F = S_T$ et $u = 1$ sachant que

$$\delta\left(S_T(W_T - \sigma)\left(\int_t^T D_t S_T dt\right)^{-1}\right) = \delta\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right) = \frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W_T$$

car

$$\delta\left(\frac{W_T}{\sigma T}\right) = \frac{W_T}{\sigma T}\delta(1) - \int_0^T D_t\left(\frac{W_T}{\sigma T}\right)dt = \frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma}.$$

□

Remarque 2.3.2.9. Par exemple s'il s'agit d'une option européenne d'achat alors

$$\phi = (\cdot - K)^+ = \max(\cdot - K, 0),$$

avec K le prix d'exercice fixé sur le contrat, n'est pas de classe C^1 mais il est possible de raisonner en approchant ϕ de façon uniforme par des fonctions régulières.

2.3.3 Calcul de Greeks pour des options exotiques

On considère ici une option dont le profit est de la forme

$$h = \phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right).$$

Exemple 2.3.3.1. Un option d'achat asiatique de prix d'exercice K a un profit

$$h = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)^+.$$

Remarque 2.3.3.2. Dans ce cas il n'y a pas de formule explicite pour la densité de la variable aléatoire $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$.

Remarque 2.3.3.3. Le prix de l'option à l'instant $t = 0$ est donné par

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right).$$

Proposition 2.3.3.4. Si ϕ est de classe C^1 de dérivée bornée et

$$\overline{S}_T := \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Alors

$$\Delta = \frac{2e^{-rT}}{S_0\sigma^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi(\overline{S}_T)\left(\frac{S_T - S_0}{T\overline{S}_T} - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right).$$

Démonstration. Premièrement, comme précédement, on a

$$\Delta = \frac{\partial V_0}{\partial S_0} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi'(\overline{S}_T)\frac{\partial \overline{S}_T}{\partial S_0}\right) = \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi'(\overline{S}_T)\overline{S}_T) =: \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi'(F)G).$$

De plus

$$D_t F = D_t\overline{S}_T = \frac{1}{T}\int_0^T D_t S_r dr = \frac{\sigma}{T}\int_t^T S_r dr$$

car, par règle de la chaîne,

$$D_t S_r = S_0 D_t(e^{h_r}) = S_0 e^{h_r} D_t h_r = S_r\sigma.$$

Donc
$$\delta\left(\frac{GS}{\int_0^T S_t D_t F dt}\right) = \frac{2}{\sigma}\delta\left(\frac{S}{\int_0^T S_t dt}\right),$$
car
$$\frac{G}{\int_0^T S_t D_t F dt} = \frac{2}{\sigma \int_0^T S_t dt},$$
i.e.
$$\sigma\left(\int_0^T S_t dt\right)\frac{1}{T}\left(\int_0^T S_t dt\right) = \sigma\left(\int_0^T S_t dt\right) G = 2\int_0^T S_t D_t F dt = \frac{\sigma}{T} 2\int_0^T S_t \int_t^T S_r dr,$$
i.e.
$$\left(\int_0^T S_t dt\right)^2 = 2\int_0^T S_t \int_t^T S_r dr.$$
En effet, en posant $M_t = \displaystyle\int_0^t S_r dr$, on a
$$M_T^2 = 2\int_0^T M_r dM_r = 2\int_0^T M_r S_r dr = 2\int_0^T S_r \int_0^r S_t dt dr = 2\int_0^T S_t \int_t^T S_r dr dt.$$
Puis, par propriété de la divergence de Malliavin,
$$\delta\left(\frac{GS}{\int_0^T S_t D_t F dt}\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\frac{\delta(S)}{\int_0^T S_t dt} - \int_0^T S_r D_r\left(\frac{1}{\int_0^T S_t dt}\right) dr\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\frac{\int_0^T S_t dW_t}{\int_0^T S_t dt} - \int_0^T S_r \frac{\int_0^T D_r S_t dt}{\left(\int_0^T S_t dt\right)^2} dt\right).$$
D'où, en utilisant un calcul précédent,
$$\delta\left(\frac{GS}{\int_0^T S_t D_t F dt}\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\frac{\int_0^T S_t dW_t}{\int_0^T S_t dt} - \int_0^T S_r \frac{\int_r^T \sigma S_t dt}{\left(\int_0^T S_t dt\right)^2} dt\right) = \frac{2}{\sigma}\frac{\int_0^T S_t dW_t}{\int_0^T S_t dt} + 1.$$
Or, par formule d'Itô appliquée à $S_t = S_0 e^{h_t} = f(h_t)$,
$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 + \int_0^t S_0 e^{h_r} dh_r + \frac{1}{2}\int_0^t S_0 e^{h_r} d\langle h, h\rangle_r \\
&= S_0 + \int_0^t S_r \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dr + \int_0^t S_r \sigma dW_r + \frac{1}{2}\int_0^t S_r \sigma^2 dr \\
&= S_0 + r\int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dW_r.
\end{aligned}$$
Donc
$$\delta\left(\frac{GS}{\int_0^T S_t D_t F dt}\right) = \frac{2(S_T - S_0)}{\sigma^2 \int_0^T S_t dt} - \frac{2r}{\sigma^2} + 1.$$
On en déduit le résultat grâce au théorème 2.3.1.1. □

2.4 Application de la formule de Clark-Ocone

Dans cette section nous allons obtenir une expression de la quantité d'actifs risqués au cours du temps dans le modèle de Black-Scholes. Pour se faire nous aurons besoin de la formule de Clark-Ocone, d'une généralisation pour être plus précis.

2.4.1 Une généralisation de la formule

On considère $(W_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien en dimension 1. Commençons par rappeler cette formule initiale.

Théorème 2.4.1.1. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \mathbb{E}(D_t F \mid \mathcal{F}_t) dW_t.$$

Remarque 2.4.1.2. On considère :

1. $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un processus adapté mesurable tel que $\displaystyle\int_0^T \theta_t^2 dt \overset{PS}{<} +\infty$.
2. $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ le processus donné par

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

tel que $\mathbb{E}(Z_T) = 1$.

3. $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ le processus donné par

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds.$$

Alors, par le théorème de Girsanov, $\tilde{W}$ est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T.$$

Lemme 2.4.1.3. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\theta \in \mathbb{L}^{1,2}$ tels que :

1. $\mathbb{E}(Z_T^2 F^2) + \mathbb{E}\left(Z_T^2 \displaystyle\int_0^T (D_t F)^2 dt\right) < +\infty$,
2. $\mathbb{E}\left(Z_T^2 F^2 \displaystyle\int_0^T \left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t \theta_s ds\right)^2\right) < +\infty$.

Alors $Z_T F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_t(Z_T F) = Z_T D_t F - Z_T F\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds\right).$$

Démonstration. On a

$$\|Z_T F\|_{1,2}^2 = \mathbb{E}(Z_T^2 F^2) + \mathbb{E}\left(Z_T^2 \int_0^T (D_t F)^2 dt\right) < +\infty.$$

Donc $Z_T F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_t(Z_T F) = Z_T D_t F + F D_t Z_T,$$

avec, par règle de la chaîne,

$$D_t Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right) D_t\left(-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right) = -Z_T D_t\left(\int_0^T \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

$$= -Z_T\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_t^T D_t(\theta_s^2) ds\right) = -Z_T\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds\right),$$

ce qui donne bien le résultat souhaité. □

Lemme 2.4.1.4. Soit $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, $\eta = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, ξ une variable aléatoire positive, ou $\mathbb{Q}$-intégrable, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi \mid \mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})}{\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})}.$$

Démonstration. Soit $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$. Alors, par définition de η,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})\eta).$$

Or $Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable, donc

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})\eta) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})).$$

Puis, comme $\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(\xi\eta\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(Z\xi\eta\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z\xi\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})).$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z\xi\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G})).$$

D'où

$$\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}),$$

i.e., comme $\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi \mid \mathcal{G}).$$

□

Théorème 2.4.1.5. On considère les mêmes hypothèses qu'au lemme 2.3.1. Alors

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F) + \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_tF - F\int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right) d\tilde{W}_t.$$

Démonstration. On pose

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F \mid \mathcal{F}_t).$$

Alors, d'après le lemme précédent,

$$Y_t = \frac{\mathbb{E}(FZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_t)} = Z_t^{-1}\mathbb{E}(FZ_T \mid \mathcal{F}_t),$$

avec

$$Z_t^{-1} = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Or, d'après la formule de Clark-Ocone et l'hypothèse 1,

$$\mathbb{E}(Z_TF \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_TF \mid \mathcal{F}_t)) + \int_0^t D_s\left(\mathbb{E}(Z_TF \mid \mathcal{F}_t)\right) dW_s = \mathbb{E}(Z_TF) + \int_0^t \mathbb{E}(D_s(Z_TF) \mid \mathcal{F}_s)dW_s,$$

avec, par changement de probabilité,

$$\mathbb{E}(Z_TF) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F).$$

Donc on obtient la première égalité suivante

$$Y_t = Z_t^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F) + Z_t^{-1}\int_0^t \mathbb{E}(D_s(Z_TF) \mid \mathcal{F}_s)dW_s.$$

De plus, d'après le lemme 2.3.1.3,

$$\mathbb{E}(D_t(Z_TF) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(Z_T\left(D_tF - F\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s\right)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Puis on obtient la seconde égalité suivante

$$\mathbb{E}(D_t(Z_TF) \mid \mathcal{F}_t) = Z_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_tF - F\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) =: Z_t\psi_t - Z_tY_t\theta_t,$$

avec

$$\psi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_tF - F\int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

En effet, en notant

$$Q = D_tF - F\left(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s\right),$$

on a, pour tout $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}\left(Z\mathbb{E}(Z_TQ \mid \mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}(ZZ_TQ) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(ZQ) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\underbrace{Z\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Q \mid \mathcal{F}_t)}_{\mathcal{F}_t-\text{mesurable}}) = \mathbb{E}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} Z\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Q \mid \mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}(Z_tZ\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Q \mid \mathcal{F}_t)),$$

d'où

$$\mathbb{E}(Z_TQ \mid \mathcal{F}_t) = Z_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Q \mid \mathcal{F}_t).$$

Par conséquent, en combinant les deux égalités précédentes, on obtient,

$$Y_t = Z_t^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F) + Z_t^{-1}\int_0^t Z_s\psi_s dW_s - Z_t^{-1}\int_0^t Z_sY_s\theta_s dW_s,$$

ce qui peut s'écrire

$$Y_t = f\left(Z_t^{-1}, \int_0^t Z_s(\psi_s - Y_s\theta_s)dW_s\right),$$

avec

$$f(x,y) = x\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F) + y\right).$$

Or, d'après l'expression de Z_t^{-1},

$$d(Z_t^{-1}) = Z_t^{-1}(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt).$$

Donc, la formule d'Itô donne

$$dY_t = \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(F) + \int_0^t Z_s(\psi_s - Y_s\theta_s)dW_s\right)Z_t^{-1}(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt) + Z_t^{-1}Z_t(\psi_t - Y_t\theta_t)dW_t + d\left\langle Z_t^{-1}, \int_0^t Z_s(\psi_s - Y_s\theta_s)dW_s\right\rangle,$$

avec

$$\left\langle Z_t^{-1}, \int_0^t Z_s(\psi_s - Y_s\theta_s)dW_s\right\rangle = \left\langle \int_0^t Z_s^{-1}\theta_s dW_s + \int_0^t \theta_s^2 ds, \int_0^t Z_s(\psi_s - Y_s\theta_s)dW_s\right\rangle = \int_0^t \theta_s(\psi_s - Y_s\theta_s)ds$$

Par conséquent

$$dY_t = Y_t(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt) + (\psi_t - Y_t\theta_t)dW_t + \theta_t(\psi_t - Y_t\theta_t)dt = \psi_t dW_t + \theta_t\psi_t dt = \psi_t d\tilde{W}_t,$$

ce qui donne

$$F = Y_T = Y_0 + \int_0^T \psi_t d\tilde{W}_t$$

et le résultat souhaité. □

2.4.2 Application au modèle financier précédent

Remarque 2.4.2.1. On considère une option avec le modèle financier introduit en section 2.2 de profit h tel que $\mathbb{E}(B_T^{-2}Z_T^2h^2) < +\infty$. Alors on rappelle que la valeur réduite du portefeuille vérifie

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}h) + \int_0^t \sigma_s\tilde{S}_s\beta_s d\tilde{W}_s.$$

Proposition 2.4.2.2. On suppose $B_T^{-1}h \in \mathbb{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_T$-mesurable et les hypothèses du théorème précédent avec $F = B_T^{-1}$ et θ. Alors le nombre β_t d'actifs risqués à l'intant t est donné par

$$\beta_t = \frac{B_t}{\sigma_t\tilde{S}_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_t(B_T^{-1}h) - B_T^{-1}h\int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Démonstration. D'après le théorème précédent

$$B_T^{-1}h = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}h) + \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_t(B_T^{-1}h) - B_T^{-1}h \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right) d\tilde{W}_t.$$

Or, par propriété sur le modèle financier,

$$B_T^{-1}h = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}h) + \int_0^T \sigma_t\beta_t\tilde{S}_t d\tilde{W}_t.$$

Alors, par unicité dans le théorème de représentation,

$$\sigma_t\beta_t\tilde{S}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_t(B_T^{-1}h) - B_T^{-1}h \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Ainsi, par définition de $\tilde{S}_t$,

$$\beta_t = \frac{B_t}{\sigma_t S_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(D_t(B_T^{-1}h) - B_T^{-1}h \int_t^T D_t\theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right),$$

□

Corollaire 2.4.2.3. Si on considère le modèle de Black-Scholes alors

$$\beta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D_t h \mid \mathcal{F}_t).$$

Exemple 2.4.2.4. Dans le cadre d'une option européenne de profit $h = \phi(S_T)$, nous avons

$$\beta_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi'(S_t S_{T-t})S_{T-t}\right).$$

Exemple 2.4.2.5. Dans le cadre d'une option asiatique de profit $\phi(\overline{S}_T)$, nous avons

$$\beta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\phi'\left(\frac{t\overline{S}_t}{T} + \frac{S_t(T-t)}{T}\overline{S}_{T-t}\right)\left(\frac{S_t(T-t)}{T}\overline{S}_{T-t}\right)\right).$$

3 Critères de densité

Une seconde utilisation importante du calcul de Malliavin est l'obtention de critères de régularité de variables aléatoires. Nous allons étudier si une variable aléatoire admet une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et si oui quelle va être la régularité de la dîte densité, à partir de condtions sur la dérivée de Malliavin de la variable aléatoire.

3.1 D'une variable aléatoire

3.1.1 Premier critère simple et majoration de la densité

On considère un processus isonormal $(W(h))_{h\in H}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec H un espace de Hilbert séparable et $\mathcal{F}$ engendré par W.

Proposition 3.1.1.1. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tel que

$$\frac{DF}{\|DF\|_H^2} \in \mathrm{Dom}(\delta).$$

Alors la loi de F admet une densité continue bornée donnée par

$$p(x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right), x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ et $\varphi(y) := \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \psi(z)dz$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Alors φ est continûment dérivable de dérivée bornée, d'où, d'après la règle de la chaîne,

$$\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2} \text{ et } D(\varphi(F)) = \varphi'(F)DF = \psi(F)DF.$$

Ainsi

$$\langle D(\varphi(F)), DF\rangle_H = \psi(F)\|DF\|_H^2.$$

Puis, comme $\dfrac{DF}{\|DF\|_H^2} \in \mathrm{Dom}(\delta)$,

$$\mathbb{E}(\psi(F)) = \mathbb{E}\left(\left\langle D(\varphi(F)), \frac{DF}{\|DF\|^2}\right\rangle_H\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(F)\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right).$$

On considère $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\psi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} \mathbb{1}_{[a,b]}.$$

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}(a \leq F \leq b) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\psi_n(F)).$$

Puis, d'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}(a \leq F \leq b) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\varphi_n(F)\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right).$$

De plus, on peut choisir $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les supports des ψ_n soient tous inclus dans $[a-1, b+1]$, et, comme $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Donc, par convergence dominée, on a la convergence simple

$$\varphi_n = \int_{-\infty}^{\cdot} \psi_n(x)dx = \int_{a-1}^{\cdot} \psi_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \int_{-\infty}^{\cdot} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx.$$

Puis, comme $\varphi_n' = \psi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} \mathbb{1}_{[a,b]}$, on a la convergence uniforme sur tout compact

$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} \int_{-\infty}^{\cdot} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx.$$

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}(a \leq F \leq b) = \mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{F} \mathbb{1}_{[a,b]}(y)dy\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\int_{a}^{b} \mathbb{1}_{]-\infty,F[}(y)dy\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right).$$

Puis, par théorème de Fubini,

$$\mathbb{P}(a \leq F \leq b) = \int_a^b \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{F>y\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right)dy.$$

D'où F est de densité donnée par

$$p(x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right), x \in \mathbb{R}.$$

De plus p est bornée par $\mathbb{E}\left(\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right)$ et continue car continue à droite et à gauche par théorème de continuité des intégrales à paramètres sachant que $\mathbb{1}_{\{F>x\}} \overset{PS}{=} \mathbb{1}_{\{F\geq x\}}$. □

Remarque 3.1.1.2. Le résultat précédent reste vrai si l'on suppose $F \in \mathbb{D}^{1,p}$ et $\frac{DF}{\|DF\|_H^2} \in \mathbb{D}^{1,p'}(H)$ pour $p, p' \in]1, +\infty[$.

Corollaire 3.1.1.3. Soit $F \in \mathbb{D}^{2,4}$ tel que $\mathbb{E}\left(\|DF\|_H^{-8}\right) < +\infty$. Alors F vérifie les hyppothèses de la proposition précédente. Donc F admet une densité p et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) \leq (\mathbb{P}(|F| > |x|))^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}(\|DF\|_H^{-2}) + 9\left(\mathbb{E}\left(\|D^2F\|_{H\otimes H}^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left(\|DF\|_H^{-8}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) \leq (\mathbb{P}(F > x))^{\frac{1}{2}}\left\|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_2.$$

De plus, comme $\mathbb{E}\left(\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right) = 0$, on a, avec la proposition précédente,

$$p(x) = \mathbb{E}\left(-\mathbb{1}_{\{F<x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right).$$

Donc, de même,

$$p(x) \leq (\mathbb{P}(F < x))^{\frac{1}{2}}\left\|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_2.$$

Or si $x \leq 0$ alors

$$\mathbb{P}(F < x) = \mathbb{P}(F < x \leq 0) \leq \mathbb{P}(|F| > |x|)$$

Ainsi, quelque soit le signe de x,

$$p(x) \leq (\mathbb{P}(|F| > |x|))^{\frac{1}{2}}\left\|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_2.$$

Or, par propriété de δ,

$$\left\|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_2^2 \leq \mathbb{E}\left(\left\|\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right\|_H^2\right) + \mathbb{E}\left(\left\|D\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right\|_{H\otimes H}^2\right) = \mathbb{E}(\|DF\|_H^{-2}) + \mathbb{E}\left(\left\|D\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_{H\otimes H}^2\right),$$

avec, par règle de la chaîne,

$$D\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right) = \frac{D^2F}{\|DF\|_H^2} - 2\frac{\langle D^2F, DF\otimes DF\rangle}{\|DF\|_H^4}.$$

Ainsi, par inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz,

$$\left\|D\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_{H\otimes H} \leq \frac{3\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}}{\|DF\|_H^2}.$$

Donc

$$\left\|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right\|_2^2 \leq \mathbb{E}(\|DF\|_H^{-2}) + 9\mathbb{E}\left(\frac{\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}^2}{\|DF\|_H^4}\right).$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}^2}{\|DF\|_H^4}\right) \leq \left\|\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}^2\right\|_2 \left\|\|DF\|_H^{-4}\right\|_2 = \left(\mathbb{E}\left(\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left(\|DF\|_H^{-8}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$p(x) \leq (\mathbb{P}(|F| > |x|))^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}(\|DF\|_H^{-2}) + 9\left(\mathbb{E}\left(\left\|D^2F\right\|_{H\otimes H}^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left(\|DF\|_H^{-8}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Ce résultat permet d'obtenir un critère de densité concernant les martingales s'écrivant comme une intégrale stochastique. Pour se faire nous allons nous placer dans l'espace de Wiener.

Proposition 3.1.1.4. Soit $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien et $(u_t)_{t\in[0,T]}$ un processus adapté tel que :

1. $$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t^2 dt\right) < +\infty.$$
2. Pour tout $t \in [0,T]$, $$u_t \in \mathbb{D}^{2,2}.$$
3. Il existe $p \in [3, +\infty[$ tel que $$\lambda := \sup_{s,t\in[0,T]} \mathbb{E}(|D_s u_t|^p) + \sup_{r,s\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T |D_{r,s}^2 u_t|^p dt\right)^{\frac{p}{2}}\right) < +\infty.$$
4. Il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$, $$|u_t| \geq \rho.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$M_t := \int_0^t u_s dW_s$$

admet une densité que l'on note p_t. De plus il existe $q > \frac{p}{p-3}$ et $c = c(\lambda, \rho, p) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$p_t(x) \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \mathbb{P}\left(|M_t| > |x|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $t \in]0,T]$ et $s \in]0,t[$. Alors

$$D_s M_t = D_s \left(\int_0^t u_r dW_r \right) = D_s(\delta(u)_t) = u_s + \int_s^t D_s u_r dW_r.$$

De plus $(D_s u_r)_{r \in [0,T]}$ est adapté et appartient à $\mathbb{L}^{1,2}$. Donc $\displaystyle\int_s^t D_s u_r dW_r \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_\theta \left(\int_s^t D_s u_r dW_r \right) = D_s u_\theta + \int_{s \vee \theta}^t D_\theta D_s u_r dW_r, \theta \in]0,t[.$$

Ainsi

$$D_\theta D_s M_t = D_\theta u_s + D_s u_\theta + \int_{s \vee \theta}^t D_\theta D_s u_r dW_r.$$

Puis, par convexité de $id^2_{\mathbb{R}_+}$ et $id^p_{\mathbb{R}_+}$, il existe $c = c(p) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\left\| D^2 M_t \right\|^p_{H \otimes H} \right) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t |D_\theta D_s M_t|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right)$$

$$\leq c_p \left(\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t |D_\theta u_s|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t |D_s u_\theta|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t \left| \int_{s\vee\theta}^t D_\theta D_s u_r dW_r \right|^2 ds\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) \right).$$

Or, par inégalité de Hölder avec $\dfrac{p}{2}$ et $q = \dfrac{1}{1-\frac{2}{p}} = \dfrac{p}{p-2}$,

$$\int_0^t \int_0^t |D_\theta u_s|^2 ds d\theta \leq \left(\int_0^t \int_0^t |D_\theta u_s|^{2\frac{p}{2}} ds d\theta \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_0^t \int_0^t 1^q ds d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \leq \lambda^{\frac{2}{p}} t^{2\frac{2}{p}} t^{2\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{2}{p}} t^{\frac{4}{p} + \frac{2(p-2)}{p}} = \lambda^{\frac{2}{p}} t^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t |D_\theta u_s|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) \leq \lambda t^p.$$

De même

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t |D_s u_\theta|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) \leq \lambda t^p.$$

Puis, par inégalité de Burkholder, il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t \left| \int_{s\vee\theta}^t D_\theta D_s u_r dW_r \right|^2 ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right) = \mathbb{E}\left(\left\| \int_{s\vee\theta}^t D_\theta D_s u_r dW_r \right\|^p_{L^2([0,t]^2,\mathbb{R})} \right)$$

$$\leq c_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_0^t \left(\int_{s\vee\theta}^t |D_\theta D_s u_r|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} ds d\theta \right)^{\frac{p}{2}} \right),$$

puis, comme précédemment avec l'inégalité de Hölder, on obtient qu'il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\left\| D^2 M_t \right\|^p_{H \otimes H} \right) \leq c_p \lambda t^p.$$

On considère également

$$\sigma(t) := \|DM_t\|^2_H = \int_0^t \left(u_s + \int_s^t D_s u_r dW_r \right)^2 ds.$$

Alors, par positivité de l'intégrant, pour tout $h \in]0,1[$,

$$\sigma(t) \geq \int_{t(1-h)}^t \left(u_s + \int_s^t D_s u_r dW_r \right)^2 ds.$$

Or, par convexité,

$$(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right).$$

Donc, en appliquant cette inégalité avec u_s et $\int_s^t D_s u_r dW_r$, on obtient

$$\sigma(t) \geq \int_{t(1-h)}^t \frac{1}{2} u_s^2 ds - \int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^2 ds.$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse 4 et en notant

$$I_h(t) = \int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^2 ds,$$

on obtient

$$\sigma(t) \geq \frac{th\rho^2}{2} - I_h(t).$$

En particulier pour $h = \frac{4}{t\rho^2 y}$ avec $y \geq \frac{4}{t\rho^2} =: a$,

$$\sigma(t) \geq \frac{2}{y} - I_h(t).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(\sigma(t) \leq \frac{1}{y}\right) \leq \mathbb{P}\left(I_h(t) \geq \frac{1}{y}\right) \leq \mathbb{P}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}} \geq \frac{1}{y^{\frac{p}{2}}}\right) \leq y^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}\right),$$

avec, par inégalité de Hölder avec q tel que $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|I_h(t)| \leq \left(\int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^p ds\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{t(1-h)}^t ds\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^p ds\right)^{\frac{2}{p}} (th)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, comme $1 + \frac{p}{2q} = \frac{p}{2}$,

$$\mathbb{E}(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}) \leq (th)^{\frac{p}{2q}} \mathbb{E}\left(\int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^p ds\right) = (th)^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E}\left(\int_{t(1-h)}^t \left(\int_s^t D_s u_r dW_r\right)^p ds\right),$$

Donc, par inégalité de Burkholder,

$$\mathbb{E}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}\right) \leq c_p (th)^{\frac{p}{2}-1} \int_{t(h-1)}^t \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t (D_s u_r)^2 dr\right)^{\frac{p}{2}}\right) ds,$$

et, par inégalité de Hölder avec $\frac{p}{2}$ et q tels que $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_s^t (D_s u_r)^2 dr \leq \left(\int_s^t |D_s u_r|^p dr\right)^{\frac{2}{p}} (t-s)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_s^t |D_s u_r|^p dr\right)^{\frac{2}{p}} (t-s)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}\right) \leq c_p (th)^{\frac{p}{2}-1} \sup_{s,r \in [0,t]} \mathbb{E}\left(|D_s u_r|^p\right) \int_{t(h-1)}^t (t-s)(t-s)^{\frac{p}{2}-1} ds,$$

avec

$$\int_{t(h-1)}^t (t-s)(t-s)^{\frac{p}{2}-1} ds = \int_{t(h-1)}^t (t-s)^{\frac{p}{2}} ds = \left[-\frac{(t-s)^{\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}+1}\right]_{t(h-1)}^t = \left(\frac{p}{2}+1\right)(th)^{\frac{p}{2}+1}.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}\right) \leq c'_p \sup_{s,r \in [0,t]} \mathbb{E}(|D_s u_r|^p)(th)^p.$$

Ainsi, pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{p}{2}\right[$,

$$\mathbb{E}\left(\sigma(t)^{-\gamma}\right) = \int_0^{+\infty} \gamma y^{\gamma-1}\mathbb{P}\left(\sigma(t)^{-1} > y\right) dy \leq \int_0^a \gamma y^{\gamma-1} dy + \gamma \int_a^\infty y^{\gamma-1}\mathbb{P}\left(\sigma(t) < \frac{1}{y}\right) dy,$$

avec

$$\int_0^a \gamma y^{\gamma-1} dy = a^\gamma = \left(\frac{4}{t\rho^2}\right)^\gamma,$$

et

$$\int_a^\infty y^{\gamma-1}\mathbb{P}\left(\sigma(t) < \frac{1}{y}\right) dy \leq \int_{\frac{4}{t\rho^2}}^{+\infty} \mathbb{E}\left(|I_h(t)|^{\frac{p}{2}}\right) y^{\gamma-1+\frac{p}{2}} dy \leq c_p'' \int_{\frac{4}{t\rho^2}}^{+\infty} \underbrace{t^p}_{\leq \frac{4^p}{\rho^{2p} y^p}} y^{\gamma-1+\frac{p}{2}} dy.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sigma(t)^{-\gamma}\right) \leq c\left(t^{-\gamma} + \int_{\frac{4}{t\rho^2}}^{+\infty} y^{\gamma-1-\frac{p}{2}} dy\right) \leq c'\left(t^{-\gamma} + t^{\frac{p}{2}-\gamma}\right).$$

On applique la propositon précédente avec $\alpha = p$ et β tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Premièrement pour $\sigma = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\|DM_t\|_H^{-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sigma(t)^{-\frac{1}{2}}\right) \leq c'\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}\right).$$

Deuxièmement on a montré précédemment

$$\left\|D^2 M_t\right\|_{L^\alpha(\Omega, H\otimes H)} = \left(\mathbb{E}\left(\left\|D^2 M_t\right\|_{H\otimes H}^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leq (c_p\lambda)^{\frac{1}{p}} t.$$

Troisièmement pour $\gamma = \beta$, on a

$$\left\|\|DM_t\|_H^{-2}\right\|_\beta = \left(\mathbb{E}\left(\|DM_t\|_H^{-2\beta}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\mathbb{E}\left(\sigma(t)^{-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(c'\left(t^{-\beta} + t^{\frac{p}{2}-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq c_\beta'\left(t^{-1} + t^{\frac{p}{2\beta}-1}\right).$$

Finalement on obtient le résultat souhaité en réinjectant les inégalité précédentes dans la proposition précédente. □

Corollaire 3.1.1.5. Dans ce cas, si de plus il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$|u_t| \leq M.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$p_t(x) \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{qM^2 t}\right).$$

3.1.2 Matrice de Malliavin et critère d'absolue continuité

Définition 3.1.2.1. Soit $F = (F^1, ..., F^m) \in (\mathbb{D}_{loc}^{1,1})^m$. Alors la matrice de Malliavin associé à F est définie par

$$\gamma_F = \left(\langle DF^i, DF^j\rangle_H\right)_{1\leq i,j\leq m}.$$

A partir de l'inversibilité de cette matrice, nous allons pouvoir en déduire l'absolue continuité de la variable aléatoire. Nous allons prouver ce théorème de deux façons différentes. Une basée sur la formule d'intégration par parties et le lemme suivant. Une autre basée sur l'approche de Bouleau et Hirsch avec l'utilisation de dérivée approximative.

Lemme 3.1.2.2. Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}^m$ telle que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $c_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} \partial_i \varphi d\mu\right| \leq c_i \|\varphi\|_\infty.$$

Alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. On suppose $m = 1$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction φ définie par, pou tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x < b \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Il existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\varphi_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} \varphi \text{ et } \varphi'_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} \varphi' = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{]a,b[}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'_n(x) d\mu(x) = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'_n(x) d\mu(x) \right| \leq c_1 \|\varphi_n\|_\infty .$$

Ainsi, par théorème de convergence dominée car μ est finie,

$$\mu([a, b]) = \int_a^b d\mu(x) = (b-a) \int_a^b \varphi'(x) d\mu(x) = (b-a) \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi'_n(x) d\mu(x) \leq (b-a)c_1 \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n\|_\infty}_{=\|\varphi\|_\infty = 1} .$$

D'où $\mu([a, b]) \leq (b-a)c_1 = c_1 \lambda([a, b])$, ce qui montre que μ est abolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. $\square$

Théorème 3.1.2.3. Soit $F = (F^1, ..., F^m)$ un vecteur aléatoire tel que :

1. Il existe $p \in]1, +\infty[$ tel que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,
$$F^i \in \mathbb{D}^{2,p}_{loc}.$$
2. La matrice γ_F est inversible presque sûrement.

Alors la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. On suppose $F_i \in \mathbb{D}^{2,p}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Soit $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$. En particulier $F_i \in \mathbb{D}^{1,p}$, donc, par théorème de la règle de la chaîne, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ et

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$,

$$\langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) \gamma_F^{ij} = ((\partial_1 \varphi(F), ..., \partial_m \varphi(F)) \gamma_F)_j .$$

Donc, comme γ_F est presque sûrement inversible, on a, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\partial_i \varphi(F) = \sum_{j=1}^m \langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle \left(\gamma_F^{-1}\right)^{ij} .$$

On considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, le compact K_N de $GL_m(\mathbb{R})$ défini par

$$K_N = \left\{ \sigma \in M_m(\mathbb{R}), \forall i, j \in [\![1, m]\!], |\sigma^{ij}| \leq N, |\det(\sigma)| \geq \frac{1}{N} \right\},$$

et la fonction $\psi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$(\psi_N)_{|K_N} = 1, (\psi_N)_{|K_{N+1}} = 0.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\psi_N(\gamma_F) \partial_i \varphi(F)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\langle D(\varphi(F)), \psi_N(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j \rangle\right)$$

Or, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$, $F^j \in \mathbb{D}^{2,p}$, donc

$$\psi_N(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j \in \mathbb{D}^{1,p}(H).$$

Donc, par définition par dualité de δ et linéarité de δ et de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\psi_N(\gamma_F)\partial_i \varphi(F)) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left(\varphi(F)\delta\left(\psi_N(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j\right)\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(F)\sum_{j=1}^{m}\delta\left(\psi_N(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j\right)\right).$$

Par conséquent

$$\left|\int \partial_i \varphi(F)\psi_N(\gamma_F) d\mathbb{P}\right| = |\mathbb{E}(\psi_N(\gamma_F)\partial_i\varphi(F))| \leq \|\varphi\|_\infty \, \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{m}\delta\left(\psi_N(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j\right)\right|\right).$$

Donc, d'après le lemme précédent, $(\psi_N(\gamma_F) \cdot \mathbb{P}) \circ F^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ de mesure de Lebesgue nulle,

$$\int_{F^{-1}(A)} \psi_N(\gamma_F) d\mathbb{P} = 0.$$

Or $\psi_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}(F^{-1}(A)) = 0.$$

Par conséquent la loi $\mathbb{P} \circ F^{-1}$ de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
On procède localement si $F^i \in \mathbb{D}^{2,p}_{loc}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. $\square$

Passons maintenant à l'approche de Bouleau et Hirsch.

Définition 3.1.2.4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $a \in \mathbb{R}$. Alors on dit que φ est approximativement dérivable en a s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\eta}\lambda\left(x \in [a-\eta, a+\eta], |\varphi(x) - \varphi(a) - (x-a)b| > \varepsilon|x-a|\right) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas on note $b = \mathrm{ap}\varphi'(a)$ la dérivée approximative de φ en a.

Lemme 3.1.2.5. Soit $\varphi, \tilde{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que φ dérivable λ-presque partout et $\varphi = \tilde{\varphi}$ λ-preque partout. Alors $\tilde{\varphi}$ est λ-presque partout approximativement dérivable et λ-presque partout

$$\mathrm{ap}(\tilde{\varphi}') = \varphi'.$$

Démonstration. On considère $N_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash N_1, \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x).$$

Comme φ est λ-presque partout dérivable, il existe $N_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle tel que φ soit dérivable en tout $a \in \mathbb{R}\backslash N_2$.
On considère $N = N_1 \cup N_2$ de mesure de Lebesgue nulle. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash N$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, par dérivabilité, il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [a-\eta_0, a+\eta_0], |\varphi(x) - \varphi(a) - (x-a)\varphi'(a)| \leq \varepsilon|x-a|.$$

Ainsi, pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$,

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \subset [a-\eta_0, a+\eta_0], |\varphi(x) - \varphi(a) - (x-a)\varphi'(a)| \leq \varepsilon|x-a|.$$

Donc

$$\frac{1}{\eta}\lambda(x \in [a-\eta, a+\eta], |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(a) - (x-a)\varphi'(a)| > \varepsilon|x-a|)$$

$$\leq \frac{1}{\eta}\lambda(x \in [a-\eta, a+\eta] \cap (\mathbb{R}\backslash N), |\underbrace{\tilde{\varphi}(x)}_{=\varphi(x)} - \underbrace{\tilde{\varphi}(a)}_{=\varphi(a)} - (x-a)\varphi'(a)| > \varepsilon|x-a|) + \frac{1}{\eta}\underbrace{\lambda(N)}_{=0} \leq 0.$$

On a donc montré

$$\frac{1}{\eta}\lambda(x \in [a-\eta, a+\eta], |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(a) - (x-a)\varphi'(a)| > \varepsilon|x-a|) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que $\tilde{\varphi}$ est λ-presque partout approximativement dérivable. $\square$

Définition 3.1.2.6. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on dit que φ est approximativement différentiable si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, φ admet des des dérivées partielles approximatives. On note $\mathrm{ap}\partial_i\varphi$ la dérivée partielle approximative de φ par rapport à la i-ième coordonnée et la gradient approximatif de φ

$$\mathrm{ap}\nabla\varphi = (\mathrm{ap}\partial_1\varphi, ..., \mathrm{ap}\partial_n\varphi).$$

Nous utiliserons le lemme suivant de théorie de la mesure.

Lemme 3.1.2.7. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mesurable telle que $m \leq n$ et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, les dérivées partielles approximatives $\partial_j\varphi_i$ existent λ-presque partout. Alors, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ tel que $\lambda(B) = 0$,

$$\int \varphi^{-1}(B) \det\left(\left(\langle \mathrm{ap}\nabla\varphi_j, \mathrm{ap}\nabla\varphi_k\rangle\right)\right)_{1\leq j,k\leq m} d\lambda = 0,$$

i.e.

$$\left(\det\left(\left(\langle \mathrm{ap}\nabla\varphi_j, \mathrm{ap}\nabla\varphi_k\rangle\right)_{1\leq j,k\leq m}\right)\cdot\lambda\right)\circ\varphi^{-1} \ll \lambda.$$

Définition 3.1.2.8. Soit $g \in H$. Alors le processus gaussien translaté W^g est défini par

$$W^g(h) = W(h) + \langle h, g\rangle, h \in H.$$

Lemme 3.1.2.9. Soit $g \in H$. Alors le processus W^g a la même loi que W, i.e. les mêmes lois finies dimensionnelles, sous une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ donnée par

$$d\mathbb{Q} = \exp\left(-W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2\right)d\mathbb{P}.$$

Démonstration. Par linéarité de W, on peut montrer que, pour tout famille orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ de H, le vecteur $(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))$ a la même loi que $(W(e_1), ..., W(e_n))$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée. Alors

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\exp\left(-W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle^2\right)\exp\left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle^2\right)\right),$$

avec $W(e_i)$ indépendant de $W(e_j)$ si $i \neq j$ par gaussiennité et car $\mathbb{E}(W(e_i)W(e_j)) = \langle e_i, e_j\rangle_H = 0$. Donc

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\exp\left(-W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle^2\right)\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle^2\right)\right),$$

avec

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle^2\right)\right) = \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} W(e_i)}(\langle e_{n+1}, g\rangle, ...)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\langle e_i, g\rangle^2\right) = 1.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\exp\left(-W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(f(\underbrace{W^g(e_1)}_{=W(e_1)+\langle g, e_1\rangle}, ..., W^g(e_n)))\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle_H W(e_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, g\rangle^2\right)\right).$$

Ainsi, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1), ..., W^g(e_n))\exp\left(-W(g) - \frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1+\langle g,e_1\rangle_H,...,x_n+\langle g,e_n\rangle_H) \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\langle e_i,g\rangle_H x_i - \frac{1}{2}\langle e_i,g\rangle_H^2\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1),...,W^g(e_n))\exp\left(-W(g)-\frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1+\langle g,e_1\rangle_H,...,x_n+\langle g,e_n\rangle_H) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\langle g,e_i\rangle_H)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} dx.$$

Puis, par changement de variable affine $y_i = x_i + \langle g,e_i\rangle_H$,

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1),...,W^g(e_n))\exp\left(-W(g)-\frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1,...,y_n)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}dy.$$

D'où, encore par lemme de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f(W^g(e_1),...,W^g(e_n))\exp\left(-W(g)-\frac{1}{2}\|g\|^2\right)\right) = \mathbb{E}(f(W(e_1),...,W(e_n))),$$

ce qui démontre le résultat voulu. □

Lemme 3.1.2.10. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,p}$ et $h,g \in H$. Alors il existe une version de $\left(\langle DF,h\rangle^{sh+g}\right)_{s\in\mathbb{R}}$ telle que, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$,

$$F^{bh+g} - F^{ah+g} \overset{PS}{=} \int_a^b \langle DF,h\rangle^{sh+g} ds.$$

Ainsi il existe une version de $\left(F^{th+g}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ à chemins absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{dF^{th+g}}{dt}(t) = \langle DF,h\rangle^{th+g}.$$

Démonstration. Elle se fait en trois étapes :
Etape 1 : Montrons que $F^{th+g} \in L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1,p[$ avec une norme L^q bornée uniformément sur tout segment en t. On a, d'après le lemme précédent,

$$\mathbb{E}(|F^{th+g}|^q) = \mathbb{E}\left(|F|^q\exp\left(W(th+g)-\frac{1}{2}\|th+g\|^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(|F|^q\exp\left(W(th+g)\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\|th+g\|^2\right).$$

Donc, par inégalité de Hölder appliquée avec $\frac{p}{q}$ et $\frac{p}{p-q}$,

$$\mathbb{E}(|F^{th+g}|) \le (\mathbb{E}(|F|^p))^{\frac{q}{p}}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{p}{p-q}(W(th+g))\right)\right)\right)^{1-\frac{q}{p}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|th+g\|^2\right).$$

Or

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{p}{p-q}(W(th+g))\right)\right) = \varphi_{W(th+g)}\left(\frac{p}{p-q}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|th+g\|^2\frac{p^2}{(p-q)^2}\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}(|F|^{th+g}) \le (\mathbb{E}(|F|^p))^{\frac{q}{p}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-q}+1\right)\|th+g\|^2\right) = (\mathbb{E}(|F|^p))^{\frac{q}{p}}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{q}{p-q}\|th+g\|^2\right).$$

Ce qui montre le résultat de l'étape 1.
Etape 2 : On suppose que $F = f(W(h_1),...,W(h_k)) \in \mathcal{S}$.
Dans ce cas, $t \longmapsto F^{th+g}$ est continûment dérivable et, par règle de la chaîne,

$$\frac{dF^{th+g}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{k}\partial_i f(W(h_1)+t\langle h,h_1\rangle+\langle g,h_1\rangle,...)\langle h,h_i\rangle = \langle DF,h\rangle^{th+g}.$$

<u>Etape 3</u> : Soit $F \in \mathbb{D}^{1,p}$. Alors, par densité, il existe $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$F_k \underset{k\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow}} F.$$

Ainsi, par continuité de D,

$$DF_k \underset{k\to+\infty}{\overset{L^p(\Omega,H)}{\longrightarrow}} DF.$$

Donc, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$F_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} F, DF_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} DF.$$

Or, d'après l'étape 2, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h, g \in H$ et $a < b \in \mathbb{R}$,

$$F_{\varphi(k)}^{bh+g} - F_{\varphi(k)}^{ah+g} = \int_a^b \langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} ds.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{\varphi(k)}^{th+g} \underset{k\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} F^{th+g}.$$

Donc

$$F_{\varphi(k)}^{bh+g} - F_{\varphi(k)}^{ah+g} \underset{k\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} F^{bh+g} - F^{ah+g}.$$

Et d'un autre côté

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b \langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} ds - \int_a^b \langle DF, h\rangle^{sh+g} ds\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_a^b |\langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} - \langle DF, h\rangle^{sh+g}| ds\right).$$

Ainsi, par Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b \langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} ds - \int_a^b \langle DF, h\rangle^{sh+g} ds\right|\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left(|\langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} - \langle DF, h\rangle^{sh+g}| ds\right).$$

Donc, d'après l'étape 1 avec la variable aléatoire $|D^h F_{\varphi(k)} - D^h F|$, p et $q = 1$,

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b \langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} ds - \int_a^b \langle DF, h\rangle^{sh+g} ds\right|\right) \leq \int_a^b \left(\mathbb{E}\left(|D^h F_{\varphi(k)} - D^h F|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} e^{\left(\frac{1}{2(p-1)}\|sh+g\|^2\right)} ds.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b \langle DF_{\varphi(k)}, h\rangle^{sh+g} ds - \int_a^b \langle DF, h\rangle^{sh+g} ds\right|\right) \leq (b-a)\left(\mathbb{E}\left(|D^h F_{\varphi(k)} - D^h F|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{s\in[a,b]} \left(e^{\left(\frac{1}{2(p-1)}\|sh+g\|^2\right)}\right),$$

avec

$$\mathbb{E}\left(|D^h F_{\varphi(k)} - D^h F|^p\right) \leq \|h\|^p \, \mathbb{E}(\left\|DF_{\varphi(k)} - DF\right\|^p) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, par passage à la limite dans l'égalité avec les $F_{\varphi(k)}$, on obtient

$$F^{bh+g} - F^{ah+g} \overset{PS}{=} \int_a^b \langle DF, h\rangle^{sh+g} ds.$$

Ainsi il existe une version de $\left(F^{th+g}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ à chemins absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{dF^{th+g}}{dt}(t) = \langle DF, h\rangle^{th+g}.$$

$\square$

Corollaire 3.1.2.11. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,p}$ et $h \in H$. Alors

$$\frac{1}{\varepsilon}(F^{\varepsilon h} - F) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\mathbb{Q}-PS}{\longrightarrow}} \langle DF, h\rangle.$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, pour $\mathbb{P} \times \lambda$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}(F^{(x+\varepsilon)h}(\omega) - F^{xh}(\omega))\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \langle DF(\omega), h \rangle^{xh}.$$

On en déduit le résultat par changement de probabilité grâce au lemme 3.1.2.9. $\square$

Lemme 3.1.2.12. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tel que $\mathbb{E}(|F|^{-2}) < +\infty$. Alors $\mathbb{P}(F > 0) \in \{0, 1\}$.

Démonstration. Soit φ la fonction signe. On considère $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ borné et $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in\,]0,1]}$ une approximation uniforme de φ.
Alors

$$\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon(F)\delta(u)) = \mathbb{E}(\langle D(\varphi_\varepsilon(F)), u \rangle) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\langle D(\varphi(F)), u \rangle),$$

car $\varphi_\varepsilon \overset{CVUSTC}{\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow}} \varphi$ et D est un opérateur fermé.
Or, par règle de la chaîne,

$$D(\varphi_\varepsilon(F)) = \varphi'_\varepsilon(F)DF.$$

De plus F ne charge pas 0. En effet, par inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|F| < \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{|F|^2} > \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \leq \varepsilon \mathbb{E}(|F|^{-2}) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc, comme $\varphi' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$,

$$\mathbb{E}(\varphi_\varepsilon(F)\delta(u)) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\mathbb{E}(\langle D(\varphi(F)), u \rangle) = 0.$$

Ainsi

$$D(\varphi(F)) = 0.$$

Donc $\varphi(F)$ est presque sûrement constant, i.e. $\mathbb{P}(F > 0) \in \{0, 1\}$. $\square$

Théorème 3.1.2.13. Soit $F = (F_1, ..., F_m)$ un vecteur aléatoire tel que :

1. Il existe $p \in\,]1, +\infty[$ tel que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$$F^i \in \mathbb{D}^{1,p}_{loc}.$$

2. La matrice γ_F est inversible presque sûrement.

Alors la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. On suppose $F^i \in \mathbb{D}^{1,p}_{loc}$, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1, m]\!]$ et $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{n,k}(t_1, ..., t_n) = (F^k)^{t_1 e_1 + ... + t_n e_n}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors, d'après un lemme précédent, le processus $\varphi^{n,k}(t_1, ..., t_{i-1}, \cdot, t_{i+1}, ..., t_n)$ admet une version à chemins absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue, donc $\varphi^{n,k}$ admet des dérivées partielles approximatives et, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{ap}\partial_i \varphi^{n,k}(t) = \langle DF^k, e_i \rangle^{t_1 e_1 + ... + t_n e_n}.$$

Donc, pour tout $k, j \in [\![1, m]\!]$,

$$\langle \mathrm{ap}\nabla\varphi^{n,k}, \mathrm{ap}\nabla\varphi^{n,j} \rangle = \sum_{i=1}^n \mathrm{ap}\partial_i\varphi^{n,k}\mathrm{ap}\partial_i\varphi^{n,j} = \left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i \rangle \langle DF^j, e_i \rangle\right)^{t_1 e_1 + ... + t_n e_n}.$$

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ de mesure de Lebesgue nulle. Alors, d'après un lemme précédent pour $\varphi = \varphi^n := (\varphi^{n,1}, ..., \varphi^{n,m})$,

$$\int_{(\varphi^n)^{-1}(B)} \det\left((\langle \mathrm{ap}\nabla\varphi^{n,k}, \mathrm{ap}\nabla\varphi^{n,j} \rangle)_{1 \leq k,j \leq m}\right) d\lambda = 0.$$

On considère
$$G := \{t \in \mathbb{R}^n, F^{t_1e_1+\ldots+t_ne_n} \in B\} = (\varphi^n)^{-1}.$$
Alors, en prenant l'espérance,
$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left(\int_G \det\left((\langle \text{ap}\nabla\varphi^{n,k}, \text{ap}\nabla\varphi^{n,j}\rangle)_{1\leq k,j\leq m}\right) d\lambda\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_G \det\left(\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m}\right)^{t_1e_1+\ldots+t_ne_n} dt\right). \end{aligned}$$
Puis, par théorème de Fubini,
$$0 = \int_G \mathbb{E}\left(\det\left(\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m}\right)^{t_1e_1+\ldots+t_ne_n}\right) dt.$$
Ainsi, par égalité en loi avec $g = \sum\limits_{i=1}^n t_ie_i$,
$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left(\det\left(\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m}\right) \mathbb{1}_{F^{-1}(B)}(t) \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(t_iW(e_i) - \frac{1}{2}t_i^2\right)\right)\right) dt.$$
Or, d'après le lemme précédent,
$$\det\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m} \overset{PS}{>} 0 \text{ ou } \det\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m} \overset{PS}{<} 0$$
Ainsi $\lambda \times \mathbb{P}$-presque partout, par stricte positivité de la fonction exponentielle,
$$\mathbb{1}_{F^{-1}(B)} \det\left(\left(\sum_{i=1}^n \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m}\right) = 0.$$
D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$, par continuité du déterminant, on obtient
$$0 = \mathbb{1}_{F^{-1}(B)} \det\left(\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \langle DF^k, e_i\rangle\langle DF^j, e_i\rangle\right)_{1\leq k,j\leq m}\right) = \mathbb{1}_{F^{-1}(B)} \det\left((\langle DF^k, DF^j\rangle)_{1\leq k,j\leq m}\right).$$
Or
$$\gamma_F \overset{PS}{\in} GL_m(\mathbb{R}).$$
Donc
$$\mathbb{P}(F^{-1}(B)) = 0.$$
Par conséquent la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. □

Théorème 3.1.2.14. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,1}_{loc}$ tel que $\|DF\|_H > 0$ presque sûrement. Alors la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. On suppose $F \in \mathbb{D}^{1,1}$ et $|F| < 1$. Soit $g :]-1,1[\longrightarrow [0,1]$ mesurable tel que
$$\lambda(y \in]-1,1[, g(y) = 0) = 1.$$
Montrons que
$$\mathbb{P}(g(F) = 0) = 1.$$
Ainsi on aura montré que la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} :]-1,1[\longrightarrow [0,1]$ de classe C^1 à dérivée bornée telle que, pour $P \circ F^{-1} + \lambda$-presque tout $y \in]-1,1[$,
$$g_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(y).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in]-1,1[$,

$$\psi^n(y) = \int_{-1}^{y} g^n(x)dx,$$

et

$$\psi(y) = \int_{-1}^{y} g(x)dx.$$

Par la règle de la chaîne, $\psi^n(F) \in \mathbb{D}^{1,1}$ et

$$D(\psi^n(F)) = (\psi^n)'(F)DF = g^n(F)DF.$$

Or, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} |\psi^n(F) - \psi(F)| &\leq \int_0^F |g^n(x) - g(x)|dx \\ &\leq \int_{[0,F],\{|g^n(x)-g(x)|>\varepsilon\}} |g^n(x) - g(x)|dx + \int_{[0,F]\cap\{|g^n(x)-g(x)|\leq\varepsilon\}} |g^n(x) - g(x)|dx. \end{aligned}$$

Donc

$$|\psi^n(F) - \psi(F)| \leq \lambda\left(x \in]-1,1[, |g^n(x) - g(x)| > \varepsilon\right) + F\varepsilon.$$

Or

$$\lambda\left(x \in]-1,1[, |g^n(x) - g(x)| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\psi_n(F) \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} \psi(F).$$

De plus, à partir d'un certain rang, $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$|\psi_n(F)| \leq 2\psi(F) \in L^1(\Omega).$$

Donc, par convergence dominée,

$$\psi_n(F) \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1}{\longrightarrow}} \psi(F).$$

D'un autre côté, comme g^n converge $\mathbb{P} \circ F^{-1}$-presque partout vers g,

$$D(\psi^n(F)) = g^n(F)DF \underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} g(F)DF.$$

De plus, à partir d'un certain rang, $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$|D(\psi^n(F))| \leq 1|D(\psi(F))| \in L^1(\Omega, H).$$

Donc, par convergence dominée,

$$D(\psi^n(F)) \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1(\Omega,H)}{\longrightarrow}} g(F)DF.$$

D'où, par caractère fermé de l'opérateur D et hypothèse sur g,

$$g(F)DF = \psi(F) = \int_0^F g(x)dx \overset{PS}{=} 0.$$

De plus, comme $\|DF\| \overset{PS}{>} 0$, on obtient

$$g(F) \overset{PS}{=} 0.$$

$\square$

Remarque 3.1.2.15. Soit $F \in \mathbb{D}_{loc}^{1,1}$. Alors la mesure $(\|DF\| \cdot \mathbb{P}) \circ F^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

3.1.3 Régularité infinie des densités

Maintenant que nous avons un critère de densité, nous pouvons nous demander si une régularité supérieure au sens de Malliavin de la variable aléatoire implique une régularité supérieure de la densité.

Définition 3.1.3.1. Soit $F = (F_1, ..., F_m) \in (\mathbb{D}^\infty)^m$. Alors on dit que F est non dégénéré si γ_F est inversible presque sûrement et

$$(\det \gamma_F)^{-1} \in \bigcap_{p \in [1,+\infty[} L^p.$$

Définition 3.1.3.2. Soit $F = (F_1, ..., F_m) \in (\mathbb{D}^{1,2})^m$. Alors on dit que F est localement non dégénéré sur un ouvert A de $\mathbb{R}^m$ s'il existe

$$(u_A^j) \in (\mathbb{D}^\infty(H))^m \text{ et } (\gamma_A^{ij})_{i,j \in [\![1,m]\!]} \in (\mathbb{D}^\infty)^{m^2}$$

tel que, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$|\det(\gamma_A)|^{-1} \in L^p$$

et, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$, sur $\{F \in A\}$,

$$\langle DF^i, u_A^j \rangle = \gamma_A^{ij}.$$

Remarque 3.1.3.3. Un vecteur aléatoire non dégénéré F est locallement non dégénéré sur $\mathbb{R}^m$ avec $u_{\mathbb{R}^m}^j = DF^j$ et $\gamma_{\mathbb{R}^m} = \gamma_F$.

Lemme 3.1.3.4. Soit γ une matrice carrée de taille m aléatoire presque sûrement inversible à coefficients dans $\mathbb{D}^\infty$ telle que, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$|\det(\gamma)|^{-1} \in L^p.$$

Alors, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$,

$$(\gamma^{-1})^{ij} \in \mathbb{D}^\infty$$

et

$$D(\gamma^{-1})^{ij} = -\sum_{k,l=1}^{m} (\gamma^{-1})^{ik} (\gamma^{-1})^{lj} D\gamma^{kl}.$$

Démonstration. Or, d'après le lemme précédent, $\mathbb{P}(\det(\gamma) > 0) \in \{0, 1\}$. On peut donc supposer, quitte à prendre l'opposé, $\det(\gamma) > 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.
On définit, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\gamma_\varepsilon^{-1} = \frac{\det(\gamma)}{\det(\gamma) + \varepsilon} \gamma^{-1} = \frac{1}{\det(\gamma) + \varepsilon} {}^t\mathrm{Com}(\gamma).$$

Or

$$\frac{1}{\det(\gamma) + \varepsilon} = f_\varepsilon \circ \det(\gamma),$$

avec

$$f_\varepsilon = \frac{1}{id_{\mathbb{R}_+^*} + \varepsilon} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} + g_\varepsilon \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} \in C_p^\infty(\mathbb{R}).$$

Ainsi, comme les coefficients de γ sont dans $\mathbb{D}^\infty$, ceux de γ_ε^{-1} le sont également.
De plus, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$,

$$(\gamma_\varepsilon^{-1})^{ij} \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^p}{\longrightarrow}} (\gamma^{-1})^{ij},$$

car, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left(|(\gamma_\varepsilon^{-1})^{ij} - (\gamma^{-1})^{ij}|^p\right) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{\det(\gamma)}{\det(\gamma) + \varepsilon} - 1\right|^p \left((\gamma^{-1})^{ij}\right)^p\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a également, pour tout $p \in [1, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, d'après la règle de Leibniz,

$$D^k (\gamma_\varepsilon^{-1})^{ij} = D^k \left(\frac{1}{\det(\gamma) + \varepsilon} \mathrm{Com}(\gamma)^{ji}\right) = \sum_{l=0}^{k} D^l \left(\frac{1}{\det(\gamma) + \varepsilon}\right) D^{k-l} \left(\mathrm{Com}(\gamma)^{ij}\right),$$

avec

$$D\left(\frac{1}{\det(\gamma)+\varepsilon}\right) = -\frac{D(\det(\gamma))}{(\det(\gamma)+\varepsilon)^2}$$

de norme $\|\cdot\|_p$ bornée indépendamment de ε car $\varepsilon > 0$. Puis

$$\begin{aligned} D^2\left(\frac{1}{\det(\gamma)+\varepsilon}\right) &= -\frac{(\det(\gamma)+\varepsilon)^2 D^2(\det(\gamma)) - 2(\det(\gamma)+\varepsilon)D(\det(\gamma))\otimes D(\det(\gamma))}{(\det(\gamma)+\varepsilon)^4} \\ &= -\frac{D^2(\det(\gamma)}{(\det(\gamma)+\varepsilon)^2} + 2\frac{D(\det(\gamma))\otimes D(\det(\gamma))}{(\det(\gamma)+\varepsilon)^4} \end{aligned}$$

de norme $\|\cdot\|_p$ également bornée indépendamment de ε. On en déduit de même pour les dérivées successives. Ainsi les dérivées de $(\gamma_\varepsilon^{-1})^{ij}$ admettent une norme $\|\cdot\|_p$ bornée indépendamment de ε, i.e. $(\gamma_\varepsilon^{-1})^{ij}$ admet une norme $\|\cdot\|_{k,p}$ bornée indépendamment de ε. Par conséquent les coefficients de la limite γ^{-1} sont également dans $\mathbb{D}^\infty$. Puis, d'un côté nous avons

$$D(\gamma_\varepsilon^{-1}\gamma) = D\left(\frac{\det(\gamma)}{\det(\gamma)+\varepsilon}I_m\right) = D\left(\frac{\det(\gamma)}{\det(\gamma)+\varepsilon}\right)I_m = \left(\frac{D(\det(\gamma))}{(\det(\gamma)+\varepsilon)} - \frac{D(\det(\gamma))\otimes D(\det(\gamma))}{(\det(\gamma)+\varepsilon)^2}\right)I_m,$$

et d'un autre côté

$$D(\gamma_\varepsilon^{-1}\gamma) = \gamma \times D(\gamma_\varepsilon^{-1}) + D(\gamma)\times\gamma_\varepsilon^{-1}.$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$0 = \gamma\times D(\gamma^{-1}) + D(\gamma)\times\gamma^{-1},$$

i.e.

$$D(\gamma^{-1}) = -\gamma^{-1}\times D(\gamma)\times\gamma^{-1},$$

i.e, pour tout $i,j \in [\![1,m]\!]$,

$$D(\gamma^{-1})^{ij} = -\sum_{k,l=1}^m (\gamma^{-1})^{ik} D\gamma^{kl}(\gamma^{-1})^{lj}.$$

□

Proposition 3.1.3.5. Soit $F = (F^1, ..., F^m)$ un vecteur aléatoire localement non dégénéré sur un ouvert A de $\mathbb{R}^m$, $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $G \in \mathbb{D}^\infty$ tel que $G = 0$ sur $\{F \notin A\}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in [\![1,m]\!]^k$, il existe $H_\alpha \in \mathbb{D}^\infty$ tel que

$$\mathbb{E}(\partial_\alpha\varphi(F)G) = \mathbb{E}(\varphi(F)H_\alpha).$$

De plus les H_α sont donnés par

$$H_\alpha = H_{\alpha_k}H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})},$$

avec

$$H_{(i)} = \sum_{j=1}^m \delta\left(G(\gamma_A^{-1})^{ij}u_A^j\right).$$

De plus, pour tout $p,q,r \in [1,+\infty[$ tels que $p<q$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, il existe $c = c(p,q) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\|H_\alpha\|_p \le c\left\|\gamma_A^{-1}u\right\|_{k,2^{k-1}r}^k \|G\|_{k,q}.$$

Démonstration. D'après la règle de la chaîne et la bilinéarité du produit scalaire, sur $\{F \in A\}$,

$$\langle D(\varphi(F)), u_A^j\rangle = \sum_{i=1}^m \partial_i\varphi(F)\langle DF^i, u_A^j\rangle = \sum_{i=1}^m \partial_i\varphi(F)\gamma_A^{ij}.$$

Ainsi, par inversion,

$$\partial_i\varphi(F) = \sum_{j=1}^m \langle D(\varphi(F)), u_A^j\rangle(\gamma_A^{-1})^{ji}.$$

Or G est nulle sur $\{F \notin A\}$. Alors

$$G\partial_i\varphi(F) = \sum_{j=1}^{m} G\langle D(\varphi(F)), u_A^j\rangle(\gamma_A^{-1})^{ji}.$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(G\partial_i\varphi(F)) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}(\langle D(\varphi(F), u_A^j G(\gamma_A^{-1})^{ji}\rangle)).$$

Puis, d'après la définition par dualité de δ et sa linéarité,

$$\mathbb{E}(G\partial_i\varphi(F)) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left(\varphi(F)\delta\left(u_A^j G(\gamma_A^{-1})^{ji}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(F)\delta\left(\sum_{j=1}^{m} u_A^j G(\gamma_A^{-1})^{ji}\right)\right) =: \mathbb{E}(\varphi(F)H_{(i)}).$$

On en déduit, par récurrence,

$$\|H_\alpha\|_p = H_{\alpha_k} H_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})}.$$

Puis, par continuité de δ,

$$H_\alpha \le c_p \left\| \sum_{j=1}^{m} (\gamma_A^{-1})^{\alpha_k j} u^j H_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})} \right\|_{1,p}.$$

Puis, par inégalité de Hölder,

$$\|H_\alpha\|_p \le c_p \left\|H_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})}\right\|_{1,q} \left\|(\gamma_A^{-1}u)^{\alpha_k}\right\|_{1,r}.$$

On en déduit la formule souhaitée par récurrence. □

Remarque 3.1.3.6. Si F est non dégénérée alors la proposition précédente est vraie pour tout $G \in \mathbb{D}^\infty$ et H_α dépend uniquement de F et G, d'où l'équation, pour tout $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $\alpha \in [\![1, m]\!]^k$,

$$\mathbb{E}(\partial_\alpha\varphi(F)G) = \mathbb{E}(\varphi(F)H_\alpha(F, G)),$$

avec

$$H_\alpha = H_{\alpha_k} H_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})},$$

et

$$H_{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \delta\left(G(\gamma_F^{-1})^{ij} DF^j\right).$$

Théorème 3.1.3.7. Soit $F = (F^1, ..., F^m)$ un vecteur aléatoire localement non dégénéré sur un ouvert A de $\mathbb{R}^m$. Alors F admet une densité infiniment dérivable sur l'ouvert A.

Démonstration. Soit $x_0 \in A, \delta \in \left]0, \frac{1}{2}\mathrm{d}(x_0, A^c)\right[$, $\delta' \in]\delta, d(x_0, A^c)[$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tel que

$$0 \le \psi \le 1, \psi_{|B(x_0,\delta)} = 1, \psi_{|B(x_0,\delta')^c} = 0.$$

Alors, d'après la proposition précédente avec $\alpha = (1, ..., m)$ et $G = \psi(F)$, on obtient, pour tout $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$,

$$\mathbb{E}(\psi(F)\partial_\alpha\varphi(F)) = \mathbb{E}(\varphi(F)H_\alpha),$$

avec

$$\varphi(F) = \int_{-\infty}^{F^1} ... \int_{-\infty}^{F^m} \partial_\alpha\varphi(x)dx.$$

Donc, par théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}(\psi(F)\partial_\alpha\varphi(F)) = \int_{\mathbb{R}^m} \partial_\alpha\varphi(x)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\alpha)dx.$$

Ainsi, pour tout $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$,

$$\mathbb{E}(\psi(F)h(F)) = \int_{\mathbb{R}^m} h(x)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\alpha)dx.$$

Or $\psi = 1$ sur $B(x_0, \delta)$, donc, sur cette boule, F admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$p(x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\alpha).$$

De même, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$,

$$\mathbb{E}(\psi(F)\partial_\beta \partial_\alpha \varphi(F)) = \mathbb{E}(\psi(F)\partial_\alpha \partial_\beta \varphi(F)) = \mathbb{E}(\partial_\beta \varphi(F) H_\alpha)$$

$$= \mathbb{E}(\varphi(F) H_\beta(H_\alpha)) = \int_{\mathbb{R}^m} \partial_\alpha \varphi(x) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,]\!]\}} H_\beta(H_\alpha)) dx.$$

Donc, par théorème de transfert, pour tout $h \in C_c^\infty(B(x_0, \delta))$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\beta h(x) p(x) dx = \int_{B(x_0,\delta)} \psi(x) \partial_\beta h(x) p(x) dx = \mathbb{E}(\psi(F)\partial_\beta h(F)) = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\beta H_\alpha) dx.$$

Ainsi p est infiniment différentiable sur $B(x_0, \delta)$ et

$$\partial_\beta p(x) = (-1)^{|\beta|} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\beta H_\alpha).$$

En particulier F admet une densité infiniment différentiable sur A. $\square$

Corollaire 3.1.3.8. Soit $F = (F^1, ..., F^m)$ un vecteur aléatoire non dégénéré. Alors la densité de F appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et

$$p(x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{F > x\}} H_{(1,\ldots,m)}(F, 1)\right), x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, avec $G = 1$, on obtient que F possède une densité p infiniment différentiable et

$$p(x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\alpha).$$

De plus, pour montrer que $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, montrons que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, m]\!]$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(x_j^{2k} |\partial_\beta p(x)|\right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(x_j^{2k} |\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\beta(H_{(1,\ldots,m)}(F, 1)))|\right) < +\infty.$$

En effet, si $x_j > 0$ alors

$$x_j^{2k} \mathbb{1}_{\{F^j > x^j\}} \leq (F^j)^{2k},$$

d'où

$$x_j^{2k} |\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!]\}} H_\beta(H_{(1,\ldots,m)}(F, 1)))| \leq \mathbb{E}\left(|F^j|^{2k} |H_\beta(H_{(1,\ldots,m)}(F, 1))|\right) < +\infty.$$

Et si $x_j < 0$ alors on procède de même car

$$p(x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{F^i > x^i, \forall i \in [\![1,m]\!] \setminus \{j\}\}} \mathbb{1}_{\{-F^j > -x^j\}} H_{(1,\ldots,m)}(F, 1)\right)$$

et on en déduit le résultat. $\square$

3.2 De la solution d'une équation différentielle stochastique

On considère $(W(t))_{t \in [0,T]}$ un mouvement brownien en dimension d, $\Omega = C_c([0, T], \mathbb{R}^d)$, $\mathbb{P}$ la mesure de Wiener en dimension d, $\mathcal{F} = \sigma(W(t), t \in [0, T])$ et $H = L^2([0, T], \mathbb{R}^d)$. Nous allons nous intéresser à la régularité de solutions d'équations différentielles stochastiques à partir de leurs dérivées de Malliavin.

Définition 3.2.0.1. Soit $A_j, B : [0, T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, 1 \leq j \leq d$, mesurables. Alors on dit qu'elles satisfassent les conditions usuelles si :

1. Elles sont de classe C^1.
2. Elles sont globalement lipschiztiennes en espace uniformément en temps : il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T]$,

$$\sum_{j=1}^{d} \|A_j(t, x) - A_j(t, x)\| + \|B(t, x) - B(t, y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Remarque 3.2.0.2. Dans ce cas, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique processus $(X(t))_{t \in [0,T]}$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$X(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t A_j(s, X(s)) dW_s^j + \int_0^t B(s, X(s)) ds.$$

3.2.1 Majoration préliminaire

Commençons par obtenir une majoration de la solution.

Théorème 3.2.1.1. Soit $(V(t))_{t\in[0,T]}$ un processus continu adapté en dimension M tel que, pour tout $p \in [2, +\infty[$,

$$\beta_p := \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\|V(t)\|^p) < +\infty.$$

On considère

$$\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow M_{m,d}(\mathbb{R}), b : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mesurables tels qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^M, y, y' \in \mathbb{R}^m$,

$$\|\sigma(x, y) - \sigma(x, y')\| + \|b(x, y) - b(x, y')\| \leq K \|y - y'\|.$$

2. Il existe $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^M$,

$$\|\sigma(x, 0)\| + \|b(x, 0)\| \leq K(1 + \|x\|^\nu).$$

On considère de plus $(\alpha(t))_{t\in[0,T]}$ un processus continu adapté en dimension m tel que, pour tout $p \in [2, +\infty[$,

$$d_p := \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|\alpha(t)\|^p\right) < +\infty.$$

Alors il existe un unique processus $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ continu adapté en dimension m tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y(t) = \alpha(t) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(V(s), Y(s))dW_s^j + \int_0^t b(V(s), Y(s))ds.$$

De plus, pour tout $p \in [2, +\infty[$, il existe $C_1 = C_1(p, T, K, \beta_{p\nu}, m, d_p) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|Y(t)\|^p\right) \leq C_1.$$

Démonstration. On considère $Y_0 = \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$,

$$Y_{n+1}(t) = \alpha(t) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(V(s), Y_n(s))dW_s^j + \int_0^t b(V(s), Y_n(s))ds.$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que Y_n est un processus continu et adapté tel que, pour tout $p \in [2, +\infty[$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_n(t)\|^p\right) < +\infty.$$

L'initialisation vient des hypothèses sur α. Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai pour Y_n.
On a, par convexité de la fonction $id_{\mathbb{R}_+}^p$, il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|Y_{n+1}(t)\|^p\right)$$

$$\leq c_p \left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|\alpha(t)\|^p\right) + \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|\int_0^t \sigma_j(V(s), Y_n(s))dW_s^j\right\|^p\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|\int_0^t b(V(s), Y_n(s))ds\right\|^p\right)\right),$$

avec, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et $t \in [0, T]$, comme W^j est un mouvement brownien,

$$\mathbb{E}\left(\left\langle \int_0^\cdot \sigma_j(V(s), Y_n(s))dW_s^j \right\rangle_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \|\sigma_j(V(s), Y_n(s))\|^2 ds\right) \leq t\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} \|\sigma_j(V(s), Y_n(s))\|^2\right),$$

et, par convexité de $id^2_{\mathbb{R}_+}$, pour tout $s \in [0,t]$,

$$\|\sigma_j(V(s),Y_n(s))\|^2 \leq 2\left(\|\sigma_j(V(s),0)\|^2 + \|\sigma_j(V(s),Y_n(s)) - \sigma_j(V(s),0)\|^2\right),$$

puis, par hypothèse sur σ_j,

$$\|\sigma_j(V(s),Y_n(s))\|^2 \leq 2K^2\left((1+\|V(s)\|^\nu)^2 + \|Y_n(s)\|^2\right) \leq 4K^2\left(1+\|V(s)\|^{2\nu} + \|Y_n(s)\|^2\right),$$

ainsi, par hypothèse sur V et l'hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|\sigma_j(V(s),Y_n(s))\|^2\right) \leq 4K^2\left(1+\sup_{0\leq s\leq t}\|V(s)\|^{2\nu} + \sup_{0\leq s\leq t}\|Y_n(s)\|^2\right) < +\infty.$$

Donc $\int_0^\cdot \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j$ est une martingale (de carré intégrable). Ainsi, par inégalité maximale de Doob,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j\right\|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^T \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j\right\|^p\right).$$

Par conséquent il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)\|^p\right) \leq c_p\left(d_p + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^T \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j\right\|^p\right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \|b(V(s),Y_n(s))\|\,ds\right)^p\right)\right).$$

Puis, par inégalité de Burkholder, il existe $c'_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $j \in [\![1,d]\!]$,

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^T \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j\right\|^p\right) \leq c'_p\mathbb{E}\left(\left\langle\int_0^\cdot \sigma_j(V(s),Y_n(s))dW_s^j\right\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right) = c'_p\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \|\sigma_j(V(s),Y_n(s))\|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}\right).$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)\|^p\right) \leq c_p\left(d_p + c'_pT\sum_{j=1}^p \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|\sigma_j(V(t),Y_n(t))\|^p\right) + T^p\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|b(V(s),Y_n(s))\|^p\right)\right).$$

Or, pour tout $j \in [\![1,d]\!]$ et $t \in [0,T]$,

$$\|\sigma_j(V(t),Y_n(t))\|^p \leq 2^{p-1}\left(\|\sigma_j(V(t),0)\|^p + \|\sigma_j(V(t),Y_n(t)) - \sigma_j(V(t),0)\|^p\right),$$

donc, par hypothèse sur σ_j,

$$\|\sigma_j(V(t),Y_n(t))\|^p \leq 2^{p-1}\left(K^p(1+\|V(t)\|^\nu)^p + K^p\|Y_n(t)\|^p\right) \leq 2^{2(p-1)}K^p\left(1+\|V(t)\|^{\nu p} + \|Y_n(t)\|^p\right).$$

De même

$$\|b(V(s),Y_n(s))\|^p \leq 2^{2(p-1)}K^p\left(1+\|V(t)\|^{\nu p} + \|Y_n(t)\|^p\right).$$

Donc, il existe $c''_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)\|\right) \leq c_p\left(d_p + c''_p\left(1+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|V(t)\|^{\nu p}\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_n(t)\|^p\right)\right)\right) < +\infty.$$

Ce qui termine la récurrence. De façon similaire on obtient l'existence de $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_{n+1}(s) - Y_n(s)\|^p\right) \leq c_pt^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left(\|Y_n(s) - Y_{n-1}(s)\|^p\right)ds.$$

Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_{n+1}(s) - Y_n(s)\|^p\right) \leq \frac{t^n}{n!}(c_pT^{p-1})^n\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r) - Y_0(r)\|^p\right).$$

En effet, si on suppose le résultat vrai au rang n, alors, d'après l'inégalité précédente,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\|^p\right)\leq c_p t^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s}\|Y_n(u)-Y_{n-1}(u)\|^p\right)ds$$
$$\leq c_p t^{p-1}\int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}(c_pT^{p-1})^{n-1}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right)ds.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\|^p\right)\leq \frac{t^{p-1}}{(n-1)!}c_p^n(T^{p-1})^{n-1}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right)\int_0^t s^{n-1}ds$$
$$=\frac{t^{p-1}t^n}{n!}c_p^n(T^{p-1})^{n-1}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right)$$

avec, $t\leq T$, donc $t^{p-1}\leq T^{p-1}$ et

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\|^p\right)\leq \frac{t^n}{n!}c_p^n(T^{p-1})^{n}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right),$$

ce qui achève la récurrence. En particulier

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}\|Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\|^p\right)\leq \frac{T^n}{n!}c_p^n(T^{p-1})^{n}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right)=\frac{1}{n!}c_p^nT^{pn}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq r\leq T}\|Y_1(r)-Y_0(r)\|^p\right).$$

Par conséquent, par inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^p>\frac{1}{2^n}\right)\leq 2^n\frac{1}{n!}c_p^nT^{pn}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_1(t)-Y_0(t)\|^p\right).$$

Ainsi, comme le membre de droite est le terme d'une série convergente, par lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^p>\frac{1}{2^n}\right\}\right)=0.$$

D'où, par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^p\leq\frac{1}{2^n}\right\}\right)=1.$$

Donc, $\mathbb{P}$-presque sûrement, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\|^p\leq\frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n\geq m\geq N$, en utilisant une constante c_p de convexité,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_n(t)-Y_m(t)\|^p=\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\sum_{k=m}^{n-1}(Y_{k+1}(t)-Y_k(t))\right\|^p\leq c_p\sum_{k=m}^{n-1}\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_{k+1}(t)-Y_k(t)\|^p\leq c_p\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

D'où, $\mathbb{P}$-presque sûrement, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[0,T]$, donc converge uniformément vers un processus aléatoire Y continue. Par conséquent, par passage à la limite dans la définition de Y_{n+1}, on obtient que Y vérifie l'équation différentielle stochastique considérée. De plus

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y(t)\|^p\right)\leq c_p\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y(t)-Y_{n+1}(t)\|^p\right)+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y_n(t)\|^p\right)\right)<+\infty.$$

□

Corollaire 3.2.1.2. On suppose que $A_j, 1\leq j\leq d, B$ vérifie les conditions usuelles. Alors, pour tout $p\in[2,+\infty[$, il existe $C_1=C_1(p,T,K,\nu,x_0)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que l'unique solution $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ de l'équation différentielle stochastique de la remarque 3.2.0.2 vérifie

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)\|^p\right)\leq C_1.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $V=id_{[0,T]}$ et $M=1$. □

3.2.2 Dérivabilité de Malliavin des solutions

Remarque 3.2.2.1. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,1}$ et $H = L^2([0,T],\mathbb{R}^d)$. Alors DF est une variable aléatoire dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ que l'on note

$$DF = (D_t F)_{t\in[0,T]} = ((D_t^1 F, ..., D_t^d F))_{t\in[0,T]}.$$

Théorème 3.2.2.2. On suppose que $A_j, 1 \leq j \leq d, B$ vérifient les conditions usuelles. Soit $(X(t))_{t\in[0,T]}$ la solution de l'équation différentielle. Alors, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ et $t \in [0,T]$,

$$X^i(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty}.$$

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1,d]\!]$,

$$\sup_{0\leq r\leq t} \mathbb{E}\left(\sup_{r\leq s\leq T} \left\|D_r^j X^i(s)\right\|^p\right) < +\infty,$$

et les dérivées $D_r^j X^i(t)$ satisfassent l'équation différentielle stochastique linéaire

$$D_r^j X(t) = \begin{cases} A_j(r,X(r)) + \displaystyle\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^d \int_t^r \partial_k A_l(s,X(s)) D_r^j(X^k(s))dW_s^l + \sum_{k=1}^m \int_r^t \partial_k B(s,X(s)) D_r^j X^k(s)ds & \text{si } r \leq t \\ 0 & \text{si } r > t \end{cases},$$

avec $\partial_k A_l(s,X(s))$ et $\partial_k B(s,X(s))$ processus uniformément bornés et adaptés en dimension m.

Démonstration. On considère, pour $t \in [0,T]$, $X_0(t) = x_0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1}(t) = x_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t A_j(s,X_n(s))dW_s^j + \int_0^t B(s,X_n(s))ds.$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par :

1. Pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ et $t \in [0,T]$,
$$X_n^i(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty}.$$
2. Pour tout $p \in]1,+\infty[$ et $t \in [0,T]$,
$$\psi_n^p(t) := \sup_{0\leq r\leq t} \mathbb{E}\left(\sup_{r\leq s\leq t} \|D_r X_n(s)\|^p\right) < +\infty.$$
3. Pour tout $p \in]1,+\infty[$, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pout tout $t \in [0,T]$,
$$\psi_{n+1}^p(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \psi_n^p(s)ds.$$

Pour $n = 0$, on a bien $X_n^i(t) = x_0^i$ constant donc dans $\mathbb{D}^{1,\infty}$ et $\psi_0^p(t) = 0 < +\infty$. De plus

$$\psi_1^p(t) = \sup_{0\leq r\leq t}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{r\leq s\leq t} \|D_r X_1(s)\|^p\right)\right),$$

avec

$$X_1(s) = \sum_{j=1}^d \int_0^t A_j(s,0)dW_s^j + \int_0^t B(s,0)ds.$$

Puis, comme $A_j(s,0), B(s,0)$ sont déterministes bornés,

$$D_r^j X_1(s) = \sum_{i=1}^d A_l^i(r,0)\mathbb{1}_{\{r\leq t\}} + \sum_{i=1}^d \int_r^t D_r^l(A_j^i(s,0))dW_s^j + \int_r^t D_r^l(B^i(s,0))ds.$$

Donc

$$\psi_1^p(t) \leq c_1.$$

On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la règle de la chaîne, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, d]\!]$,

$$A^i_j(s, X_n(s)), B^i(s, X_n(s)) \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et de plus

$$D_r(A^i_j(s, X_n(s))) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k A^i_j(s, X_n(s)) D_r(X^k_n(s)) \mathbb{1}_{\{r \leq s\}},$$

et

$$D_r(B^i(s, X_n(s))) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k B^i(s, X_n(s)) D_r(X^k_n(s)) \mathbb{1}_{\{r \leq s\}}.$$

Ainsi, comme $\partial_k A^i_j$ et $\partial_k B^i$ sont bornés et d'après la propriété 2 de l'hypothèse de récurrence,

$$A^i_j(s, X_n(s)), B^i(s, X_n(s)) \in \mathbb{D}^{1,\infty}.$$

Les processus $A^i_j(s, X_n(s))$ sont adaptés et sont de carrés intégrables d'après les égalités précédentes et la propriété 2 de l'hypothèse de récurrence. Donc, par propriété,

$$\int_0^t A^i_j(s, X_n(s)) dW^j_s \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et

$$D^l_r \left(\int_0^t A^i_j(s, X_n(s)) dW^j_s \right) = A^i_l(r, X_n(r)) \mathbb{1}_{\{r \leq t\}} + \int_r^t D^l_r(A^i_j(s, X_n(s))) dW^j_s.$$

De plus

$$\int_0^t B^i(s, X_n(s)) ds \in \mathbb{D}^{1,2},$$

et

$$D^l_r \left(\int_0^t B^i(s, X_n(s)) ds \right) = \int_0^t D^l_r(B^i(s, X_n(s))) ds = \int_r^t D^l_r(B^i(s, X_n(s))) ds.$$

Par conséquent

$$X^i_{n+1}(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty},$$

et

$$D^j_r X_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{d} A^i_l(r, X_n(r)) \mathbb{1}_{\{r \leq t\}} + \sum_{i=1}^{d} \int_r^t D^l_r(A^i_j(s, X_n(s))) dW^j_s + \int_r^t D^l_r(B^i(s, X_n(s))) ds.$$

Ainsi il existe $c_p \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{r \leq s \leq t} |D^j_r X_{n+1}(s)|^p \right) \leq c_p \left(\gamma_p + T^{p-1} K^p \int_r^t \mathbb{E} \left(|D^j_r X_n(s)|^p \right) ds \right),$$

avec, comme les A_j vérifient les conditions usuelles,

$$\gamma_p := \sup_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq d} \left(\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |A_j(t, X_n(t))|^p \right) \right) < +\infty.$$

On obtient bien les propriétés 2 et 3 de pour X_{n+1} ce qui conclut la récurrence.
Or nous avons

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t) - X(t)\|^p \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus

$$\psi_{n+1}(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \psi_n(s) ds.$$

Donc

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (\psi_n(t)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\psi_{n+1}(t)) \leq c_1 + \int_0^t \sup_{n \in \mathbb{N}} (\psi_n(s)) ds.$$

Donc, par lemme de Grönwall,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (\psi_n(t)) \leq c_1 \exp(c_2 t) \leq c_1 \exp(c_2 T).$$

Ainsi les dérivées des $X_n^i(t)$ sont bornées dans $L^p(\Omega, H)$ uniformément en n pour tout $p \geq 2$. Par conséquent la limite vérifie

$$X^i(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty}.$$

Et on obtient les équations différentielles stochastiques linéaires souhaitées. $\square$

De façon similaire à la démonstration du théorème précédent, on peut démontrer le lemme suivant, cas particulier du théorème 3.2.1.1, avec les coefficients σ_j et b linéaires.

Lemme 3.2.2.3. Soit $(\alpha(r,t))_{0\leq r\leq t\leq T}$ et $(V_j(t))_{1\leq j\leq d, 0\leq t\leq T}$ deux processus continus adaptés tels que α soit à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, les V_j soient uniformément bornés et à valeurs dans $M_m(\mathbb{R})$. On suppose de plus que

$$\alpha^i(r,t), V_j^{kl}(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty},$$

et que les quantités suivantes sont finis

$$\sup_{0\leq r\leq T}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{r\leq t\leq T}\|\alpha(r,t)\|^p\right)\right), \sup_{0\leq s\leq T}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t\leq T}\|D_s V_j(t)\|^p\right)\right), \sup_{0\leq s,r\leq T}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{r\vee s\leq t\leq T}\|D_s\alpha(r,t)\|^p\right)\right).$$

On considère $(Y(t))_{r\leq t\leq T}$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y(t) = \alpha(r,t) + \int_r^t V_j(s)Y(s)dW_s^j + \int_r^t V_0(s)Y(s)ds.$$

Alors $Y^i(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty}$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ et $D_s Y^i(t)$ vérifie l'équation linéaire, pour tout $s \in [0,t]$,

$$D_s^j Y(t) = D_s^j \alpha(r,t) + V_j(s)Y(s)\mathbb{1}_{\{r\leq s\leq t\}} + \sum_{l=1}^d \int_r^t \left(D_s^j V_l(u)Y(u) + V_l(u)D_s^j Y(u)\right) dW_u^l$$

$$+ \int_r^t \left(D_s^j V_0(u)Y(u) + V_0(u)D_s^j Y(u)\right) du.$$

Remarque 3.2.2.4. Dans ce cas, la solution Y vérifie

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|Y(t)\|^p\right) < +\infty, \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leq t\leq T}\|D_s Y(t)\|^p\right) < +\infty.$$

Grâce à ce lemme et au théorème précédent, on obtient le résultat suivant. Sa démonstration, faisant intervenir les dérivées successives de Malliavin dans $L^2([0,T])$, est technique et se trouve dans le livre de David Nualart [6].

Théorème 3.2.2.5. Soit X la solution de l'équation différentielle stochastique. On suppose que A_j^i, B^i sont infiniment différentiables selon x avec des dérivées partielles à tout ordre plus grandes ou égales à 1 et que $A_j^i(\cdot,0), B^i(\cdot,0)$ sont bornés. Alors

$$X^i(t) \in \mathbb{D}^\infty.$$

3.2.3 Expression de la dérivée de Malliavin des solutions

Proposition 3.2.3.1. On suppose que A_j, B satisfassent les conditions usuelles. On considère X la solution de l'équation différentielle stochastique associée et Y la matrice aléatoire dont les coefficients sont définis par l'équation différentielle stochastique

$$Y_j^i(t) = \delta_j^i + \sum_{l=1}^d \int_0^t \partial_k A_l^i(s,X(s))Y_j^k(s)dW_s^l + \int_0^t \partial_k B^i(s,X(s))Y_j^k(s)ds.$$

Alors $Y(t)$ est inversible et

$$D_r^j X_t^i = \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^m Y_l^i(Y^{-1}(r))_k^l A_j^k(r,X(r)).$$

Démonstration. On considère la matrice aléatoire Z dont les coefficients sont définis par l'équation différentielle stochastique

$$Z_j^i(t) = \delta_j^i - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{d}\int_0^t Z_k^i(s)\partial_j A_l^k(s, X(s))dW_s^l$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{m}\int_0^t Z_k^i(s)\left(\partial_k^i B(s, X(s)) - \partial_\alpha A_l^k(s, X(s))\partial_j A_l^\alpha(s, X(s))\right) ds.$$

Alors, en utilisant la formule d'Itô,

$$Z_j^i(t)Y_k^j(t) = \delta_j^i\delta_k^j = \delta_k^i.$$

Donc

$$Z(t)Y(t) = I_m.$$

De même

$$Y(t)Z(t) = I_m.$$

Ainsi $Y(t)$ est inversible et

$$Y(t)^{-1} = Z(t).$$

Puis $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}Y_l^i(Y^{-1}(r))_k^l A_j^k(r, X(r))$ vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire vérifiée par $D_j^r X_t^i$, d'où, par unicité,

$$D_r^j X_t^i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}Y_l^i(Y^{-1}(r))_k^l A_j^k(r, X(r))$$

□

Définition 3.2.3.2. Pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^m$, on définit la matrice σ par

$$\sigma^{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^{d}A_k^i(t, x)A_k^j(t, x).$$

Et le temps d'arrêt

$$S = \inf\left(t \in]0, T], \int_0^t \mathbb{1}_{\{\det(\sigma(s,X(s)))>0\}}ds > 0\right).$$

Corollaire 3.2.3.3. On suppose que A_j, B satisfasse les conditions usuelles. On considère X la solution de l'équation différentielle stochastique associée en remarque 3.2.0.2. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, la loi de $X(t)$ conditionnellement à $\{t > S\}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. Soit $t > S$. Alors, d'après ce qui précède,

$$\gamma_{X(t)}^{ij} = \langle DX^i(t), DX^j(t)\rangle_H = \sum_{l=1}^{d}\int_0^t D_r^l X^i(t)D_r^l X^j(t)dr = \left(Y(t)C(t)^tY(t)\right)^{ij},$$

avec

$$C(t)^{ij} = \sum_{k,k'=1}^{m}\sum_{l=1}^{d}\int_0^t (Y^{-1}(s))_k^i A_l^k(s, X(s))(Y^{-1}(s))_{k'}^j A_l^{k'}(s, X(s))ds.$$

Donc $\det(\gamma_{X(t)}) > 0$ si et seulement si $\det(C(t)) > 0$.
Or $t > S$, donc il existe $G \subset [0, t]$ tel que $\lambda(G) > 0$ et pour tout $s \in G$,

$$\det(\sigma(s, X(s)) > 0.$$

Donc $\sigma(s, X(s))$ est une matrice symétrique définie positive, d'où, en notant $\lambda(s)$ sa plus petite valeur propre, $\lambda(s) > 0$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^m$,

$${}^tv\sigma(s, X(s))v \geq \lambda(s)\left\|v\right\|^2.$$

Puis, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on considère $v = \ {}^t(Y^{-1}(s))u$, d'où, par intégration de l'inégalité précédente sur $[0,t] \cap G$,

$$\int_0^t \mathbb{1}_G(s)^t v\sigma(s,X(s))vds \geq \int_0^t \mathbb{1}_G(s)\lambda(s) \|v\|^2 ds,$$

on obtient

$$\int_0^t \mathbb{1}_G(s)^t uY^{-1}(s)\sigma(s,X(s))^t(Y^{-1}(s))uds \geq \int_0^t \mathbb{1}_G(s)\lambda(s) \|v\|^2 ds \geq \int_0^t \frac{\mathbb{1}_G(s)}{\|Y(s)\|^2} ds \|u\|^2 .$$

Par conséquent, d'après l'expression de σ et celle de $C(t)$,

$${}^t uC(t)u \geq k(t) \|u\|^2 ,$$

avec

$$k(t) = \int_0^t \frac{\mathbb{1}_G(s)}{\|Y(s)\|^2} ds.$$

Donc $C(t)$ est une matrice symétrique définie positive, en particulier $\det(C(t)) > 0$. De plus, d'après le théorème 3.2.2.5,

$$X(t) \in \mathbb{D}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m).$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.1.2.13, $X(t)$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$. □

Remarque 3.2.3.4. Si on suppose que σ est uniformément elliptique i.e. qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$ et $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$,

$${}^t y\sigma(s,x)y \geq C \|y\|^2 .$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$ et $s \in [0,t]$,

$$\det(\sigma(s,X(s))) \geq C^m > 0.$$

Ainsi

$$S = 0.$$

Par conséquent on peut enlever le conditionnement dans le résultat du théorème précédent.

4 Utilisation pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades

4.1 Dérivée de Malliavin de la solution

4.1.1 Définition d'une équation différentielle stochastique rétrograde

On se place dans le cadre $H = L^2([0,T])$. On considère une variable aléatoire ξ appelé condition initiale, un générateur

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

et une équation différentielle stochastique rétrograde associée

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))ds - \int_t^T {}^tZ(t)dW_s. \tag{1}$$

Commençons par rappeler ce qu'est la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde. Puis nous rappelerons les hypothèses suffisantes pour qu'il y ait existence et unicité de la solution.

Définition 4.1.1.1. Une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde est une paire (Y, Z) avec $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ un processus adapté à trajectoires continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$ tel que $\displaystyle\int_0^T \|Z(s)\|^2 ds \overset{PS}{<} +\infty$.

Définition 4.1.1.2. L'espace $L_T^p(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$L_T^p(\mathbb{R}^d) = \{X \in L^p(\mathbb{R}^d)\ \mathcal{F}_T - \text{mesurable}\}.$$

Définition 4.1.1.3. L'espace $\mathbb{H}_T^p(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des processus prévisibles $(X(t))_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\|X\|_p^p := \mathbb{E}\left(\int_0^T \|X(t)\|^p dt\right) < +\infty.$$

Théorème 4.1.1.4. On suppose :

1. $\xi \in L_T^2(\mathbb{R}^d)$,
2. $f(\cdot, 0, 0) \in \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$
3. f uniformément lipschitzienne i.e. il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $\mathbb{P}\otimes\lambda$-presque tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0,T]$, pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n\times d}$,

$$\|f(\omega, t, y_1, z_1) - f(\omega, t, y_2, z_2)\| \le K\left(\|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|\right).$$

Alors l'équation différentielle stochastique rétrograde (1) admet un unique couple solution (Y, Z) dans $\mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^{n\times d})$. De plus

$$\|Y\|_{S^2}^2 := \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} \|Y_s\|^2\right) < +\infty,$$

et nous avons la majoration suivante

$$\|Y\|_{S^2}^2 + \|Z\|_2^2 \le C\left(\mathbb{E}(\|\xi\|^2) + \|f(\cdot, 0, 0)\|_2^2\right), \quad C \in \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 4.1.1.5. Il est également possible de remplacer l'hypothèse 3 en supposant f continue à croissance linéaire en (y, z), lipschitzienne en z et vérifiant une condition de monotonie, pour tout $y, y' \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle f(\cdot, y, \cdot) - f(\cdot, y', \cdot), y - y'\rangle \le k\|y - y'\|^2, \quad k \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous avons également le résultat utile suivant servant à comparer les solutions si les paramètres sont comparables.

Corollaire 4.1.1.6. On se place dans le cas unidimensionnel $d = 1$ avec deux équations différentielles stochastiques rétrogrades de paramètres (f_1, ξ_1) et (f_2, ξ_2) vérifant les hypothèses du théorme 4.1.14. On suppose que $\lambda_{leb} \times \mathbb{P}$-presque partout

$$\xi_1 \leq \xi_2, \quad f_1(Y_2, Z_2) \leq g_2(Y_2, Z_2).$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \quad Y_{1,t} \leq Y_{2,t}$$

De plus si $\mathbb{P}(\xi_1 < \xi_2) > 0$ ou $f_1(Y_2, Z_1) < g_2(Y_2, Z_2)$ sur un ensemble de mesure non nulle pour $\lambda_{leb} \times \mathbb{P}$, alors $Y_{1,0} < Y_{1,0}$.

Les démonstrations des résultats des théorèmes précédents se trouvent dans les notes de cours de Bruno Bouchard [3].

4.1.2 Résultats sur la dérivée de Malliavin de la solution

Lemme 4.1.2.1. Soit $Z \in \mathbb{H}^2_T(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$I(t) := \int_t^T {}^t Z(s) dW_s \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$Z^i \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2}) \text{ i.e. } \int_0^t \left\| Z^i(t) \right\|_{1,2} dt < +\infty,$$

et $\lambda \otimes \mathbb{P}$-presque partout

$$D^i_\theta I(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^T D^i_\theta Z(r) dW_r & \text{si} \quad \theta \leq t \\ \displaystyle Z^i(\theta) + \int_\theta^T D^i_\theta Z(r) dW_r & \text{si} \quad \theta > t \end{cases}$$

Démonstration. Pour simplifier les calculs, on se place en dimension 1. On note

$$X(t) = \int_0^t Z(s) dW_s.$$

Alors, grâce à l'hypothèse

$$X(T) = \int_0^T Z(s) dW_s = Y(0) \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Donc, d'après la proposition 1.4.0.8,

$$Z \in \mathbb{L}^{1,2} = \mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T])) = L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2}) \subset \mathrm{Dom}(\delta).$$

De plus

$$X \in \mathbb{L}^{1,2} \subset \mathrm{Dom}(\delta),$$

et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t \mathbb{E}\left(\| D_s X(t) \|^2 \right) ds = \int_0^t \mathbb{E}(\| Z(s) \|^2) ds + \int_0^t \int_0^s \mathbb{E}\left(\| D_r Z(s) \|^2 \right) dr ds.$$

Puis, d'après la proposition 1.3.2.9,

$$D_\theta X(t) = D_\theta \left(\delta \left((Z(s) \mathbb{1}_{\{s \leq t\}})_{s \in [0,T]} \right) \right) = Z(\theta) \mathbb{1}_{\{\theta \leq t\}} + \int_0^t D_\theta Z(r) dW_r = Z(\theta) \mathbb{1}_{\{\theta \leq t\}} + \int_\theta^t D_\theta Z(r) dW_r.$$

D'où

$$D_\theta I(t) = D_\theta X(T) - D_\theta X(t) = Z(\theta) \mathbb{1}_{\{\theta > t\}} + \int_t^T D_\theta Z(r) dW_r.$$

En particulier si $\theta \leq t$, alors

$$D_\theta I(t) = \int_t^T D_\theta Z(r) dW_r,$$

et sinon $\theta > t$ et

$$D_\theta I(t) = Z(\theta) + \int_\theta^T D_\theta Z(r) dW_r.$$

□

Définition 4.1.2.2. L'espace $\mathbb{L}^a_{1,p}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des processus $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ progressivement mesurables tels que :

1. pour λ-presque tout $t \in [0,T]$, $X(t) \in \mathbb{D}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,
2. DX admette une version progressivement mesurable,
3. $\|X\|^a_{1,p} = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \|X(t)\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_0^T \int_0^T \|D_\theta X(t)\|^2 d\theta dt\right)^{\frac{p}{2}}\right) < +\infty$

Définition 4.1.2.3. L'espace $S^p_T(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des processus $(X(t))_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurables à trajectoires continues tel que

$$\|X\|_{S^p} := \left(\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Théorème 4.1.2.4. On suppose :

1. $\xi \in \mathbb{D}^{1,2}$,
2. f continûment différentiable en $(y,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d}$ avec des dérivées partielles continues et bornées uniformément,
3. pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d}$, $f(\cdot,y,z) \in \mathbb{L}^a_{1,2}(\mathbb{R}^d)$ de dérivée de Malliavin notée $D_\theta f(t,y,z)$,
4. $f(\cdot,0,0) \in \mathbb{H}^4_T(\mathbb{R}^d)$,
5. $\xi \in L^4(\mathbb{R}^d)$,
6. $\int_0^T \mathbb{E}(\|D_\theta \xi\|^2) d\theta < +\infty$,
7. $\int_0^T \|D_\theta f(\cdot,Y,Z)\|_2^2 d\theta = \int_0^T \mathbb{E}\left(\int_0^T \|D_\theta f(t,Y,Z)\|^2 dt\right) d\theta < +\infty$,
8. Pour tout $t \in [0,T], y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n\times d}$,

$$\|D_\theta f(t,\omega,y_1,z_1) - D_\theta f(t,\omega,y_2,z_2)\| \leq K_\theta(t,\omega)\left(\|y_1-y_2\| + \|z_1-z_2\|\right),$$

avec, pour λ-presque tout $\theta \in [0,T]$, $(K_\theta(t))_{t\in[0,T]}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_0^T \|K_\theta\|_4^4 d\theta = \int_0^T \mathbb{E}\left(\int_0^T \|K_\theta(t)\|^4 dt\right) d\theta < +\infty.$$

Alors :

1. l'unique solution (Y,Z) de (1) est dans $L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R}^{n\times d}))$,
2. pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe une version de $\left(D^i_\theta Y(t), D^i_\theta Z(t)\right)_{0\leq t,\theta\leq T}$ vérifiant, pour tout $\theta \in [0,T]$ et $t \in [0,\theta[$,

$$D^i_\theta Y(t) = 0, D^i_\theta Z(t) = 0,$$

et, pour tout $t \in [0,T]$ et $\theta \in [0,t]$,

$$\begin{aligned} D^i_\theta Y(t) &= D^i_\theta \xi \\ &+ \int_t^T \left(\partial_y f(s,Y(s),Z(s)) D^i_\theta Y(s) + \partial_z f(s,Y(s),Z(s)) D^i_\theta Z(s) + D^i_\theta f(s,Y(s),Z(s))\right) ds \\ &- \int_t^T D^i_\theta Z(s) dW_s, \end{aligned}$$

3. $(D_t Y(t))_{t\in[0,T]}$ est une version de $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}^d}$.

Démonstration. Pour simplifier on suppose $n = d = 1$. Soit $(Y^k, Z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de Picard définis par, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y^0(t) = 0, Z^0(t) = 0,$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ,

$$Y^{k+1}(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y^k(s), Z^k(s))ds - \int_t^T {}^t Z^{k+1}(s)dW_s.$$

Alors, par résultat sur la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde, $(Y^k, Z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $S^4_T(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^4_T(\mathbb{R})$ vers (Y, Z) l'unique solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$(Y^k, Z^k) \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2} \times \mathbb{D}^{1,2}).$$

L'initialisation est immédiate car $(Y^0, Z^0) = (0, 0)$. On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$ i.e.

$$(Y^k, Z^k) \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2} \times \mathbb{D}^{1,2}) \text{ i.e. } \int_0^T \left(\|Y(t)\|^2_{1,2} + \|Z(t)\|^2_{1,2}\right) dt < +\infty.$$

Donc, d'après la proposition 1.4.0.8 grâce à l'hypothèse 3,

$$\int_t^T f(s, Y^k(s), Z^k(s))ds \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

De plus $\xi \in \mathbb{D}^{1,2}$ d'après l'hypothèse 1. Ainsi

$$\xi + \int_t^T f(s, Y^k(s), Z^k(s))ds \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

D'où, d'après la proposition 1.2.2.4,

$$Y^{k+1}(t) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T f(s, Y^k(s), Z^k(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right) \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Puis

$$\int_t^T {}^t Z^{k+1}(z)dW_s = \xi + \int_t^T f(s, Y^k(s), Z^k(s))ds - Y^{k+1}(s) \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Donc, d'après le lemme précédent,

$$Z^{k+1} \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2}),$$

De plus

$$D_\theta Y^{k+1}(t) = D_\theta \xi - \int_t^T D_\theta Z^{k+1}(s)dW_s$$
$$+ \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s))D_\theta Y^k(s) + \frac{\partial f}{\partial z}(s, Y^k(s), Z^k(s))D_\theta Z^k(s) + D_\theta f(s, Y^k(s), Z^k(s))\right) ds$$

i.e. $(D_\theta Y^{k+1}, D_\theta Z^{k+1})$ vérifie une équation différentielle stochastique rétrograde de condition finale $D_\theta\xi$ et de générateur ne dépendant pas des variables (y, z) représentant $(D_\theta Y^{k+1}, D_\theta Z^{k+1})$. Puis, grâce aux hypothèses 1, 6 et 2, à l'hypothèse de récurrence et à $Z^{k+1} \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2})$, on en déduit

$$Y^{k+1} \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2}),$$

ce qui achève la récurrence et montre la conclusion 1. Pour la suite, on considère (Y^θ, Z^θ) défini par l'équation différentielle stochastique rétrograde, pour $t \in [\theta, T]$,

$$\begin{aligned} Y^\theta(t) &= D_\theta\xi \\ &\quad + \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s))Y^\theta(s) + \frac{\partial f}{\partial z}(s, Y(s), Z(s))Z^\theta(s) + D_\theta f(s, Y(s), Z(s))\right) ds \\ &\quad - \int_t^T Z^\theta(s)dW_s. \end{aligned}$$

ce qui est bien licite car de générateur

$$g : \begin{array}{rcl} \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, t, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, Y(t), Z(t))y + \frac{\partial f}{\partial z}(t, Y(t), Z(t))z + D_\theta f(t, Y(t), Z(t))\right)(\omega) \end{array}$$

vérifiant les hypothèses du théorème précédent grâce aux hypothèses de ce théorème. Ainsi, par estimée a priori avec les couples (Y^θ, Z^θ) et $(0,0)$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\left\|Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|Z^\theta\right\|_2^2 \leq C\left(\mathbb{E}((Y^\theta(T))^2) + \|g(\cdot,0,0)\|_2^2\right) = C\mathbb{E}\left((D_\theta\xi)^2 + \|D_\theta f(\cdot, Y, Z)\|_2^2\right).$$

Ainsi, grâce aux hypothèses 6 et 7,

$$\int_0^T \left(\left\|Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|Z^\theta\right\|_2^2\right) d\theta \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^T (D_\theta\xi)^2 d\theta + \int_0^T \|D_\theta f(\cdot, Y, Z)\|_2^2 d\theta\right) < +\infty.$$

Puis, par estimée a priori appliqué aux couples $(D_\theta Y^{k+1}, D_\theta Z^{k+1})$ et (Y^θ, Z^θ) de même condition finale, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\left\|D_\theta Y^{k+1} - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^{k+1} - Z^\theta\right\|_2^2 \leq C\left\|\delta^k\right\|_2^2 = C\mathbb{E}\left(\int_\theta^T (\delta^k(s))^2 ds\right),$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \delta^k(s) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s))D_\theta Y^k(s) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s))Y^\theta(s) \\ & & +\frac{\partial f}{\partial z}(t, Y^k(s), Z^k(s))D_\theta Z^k(s) - \frac{\partial f}{\partial z}(s, Y(s), Z(s))Z^\theta(s) \\ & & +D_\theta f(s, Y^k(s), Z^k(s)) - D^\theta f(s, Y(s), Z(s)). \end{array}$$

Ainsi, par inégalité de convexité, il existe $C' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\left\|D_\theta Y^{k+1} - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^{k+1} - Z^\theta\right\|_2^2 \leq C'\left(A^k(\theta) + B^k(\theta) + C^k(\theta)\right),$$

avec

$$A^k(\theta) = \mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(D_\theta f(s, Y^k(s), Z^k(s)) - D_\theta f(s, Y(s), Z(s))\right)^2 ds\right),$$

$$\begin{array}{rcl} B^k(\theta) & = & \mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s))\left(D_\theta Y^k(s) - Y^\theta(s)\right)\right)^2 ds\right) \\ & & +\mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\frac{\partial f}{\partial z}(s, Y^k(s), Z^k(s))\left(D_\theta Z^k(s) - Z^\theta(s)\right)\right)^2 ds\right) \end{array},$$

et

$$\begin{array}{rcl} C^k(\theta) & = & \mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s))\right)Y^\theta(s)\right)^2 ds\right) \\ & & +\mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial z}(s, Y(s), Z(s))\right)Z^\theta(s)\right)^2 ds\right) \end{array}.$$

Pour $A^k(\theta)$, on a, par hypothèse 8,

$$A_\theta^k \leq \mathbb{E}\left(\int_\theta^T (K_\theta(s))^2(|Y^k(s) - Y(s)| + |Z^k(s) - Z(s)|)^2 ds\right)$$

$$\leq 2\left(\mathbb{E}\left(\int_\theta^T (K_\theta(s))^2(Y^k(s) - Y(s))^2 ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_\theta^T (K_\theta(s))^2(Z^k(s) - Z(s))^2 ds\right)\right).$$

De plus, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left(\int_\theta^T (K_\theta(s))^2(Y^k(s) - Y(s))^2 ds\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(\int_\theta^T (K_\theta(s))^4 ds\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left(\int_\theta^T (Y^k(s) - Y(s))^4 ds\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même avec le terme avec Z, d'où, en utilisant l'hypothèse 8,

$$A^k(\theta) \leq 2 \underbrace{\|K_\theta\|_4^2}_{<+\infty} \underbrace{\left(\left\|Y^k - Y\right\|_4^2 + \left\|Z^k - Z\right\|_4^2\right)}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Donc

$$A^k(\theta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par hypothèse 8 et convergence donc bornitude,

$$A^k(\theta) \leq 2 \left(\left\|Y^k - Y\right\|_4^2 + \left\|Z^k - Z\right\|_4^2\right) \|K_\theta\|_4^2 \leq M \|K_\theta\|_4^2 \in L^1([0,T]).$$

D'où, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^T A^k(\theta) d\theta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis, pour $C^k(\theta)$, on a, par continuité des dérivées partielles de f et convergence $\lambda \otimes \mathbb{P}$-presque sûre,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, comme les dérivées partielles sont bornées, on a la domination,

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s))\right) Y^\theta(s)\right)^2 \leq M' \sup_{s\in[0,T]} (Y^\theta(s))^2 \in L^1(\Omega \times [0,T] \times [0,T]).$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, Y(s), Z(s))\right) Y^\theta(s)\right)^2 ds\right) d\theta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a de même

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(\int_\theta^T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z}(s, Y^k(s), Z^k(s)) - \frac{\partial f}{\partial z}(s, Y(s), Z(s))\right) Z^\theta(s)\right)^2 ds\right) d\theta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où

$$\int_0^T C^k(\theta) d\theta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, pour $B^k(\theta)$, par bornitude des dérivées partielles,

$$\int_0^T B^k(\theta) d\theta \leq M'^2 T^2 \left\|D_\theta Y^k - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + M'^2 T \left\|D_\theta Z^k - Z^\theta\right\|_2^2.$$

On considère à partir de maintenant T assez petit pour que

$$\alpha := \max(M'^2 T^2, M'^2 T) < 1.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après tout ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$,

$$\int_0^T \left(\left\|D_\theta Y^{k+1} - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^{k+1} - Z^\theta\right\|_2^2\right) d\theta \leq \varepsilon + \alpha \int_0^T \left(\left\|D_\theta Y^k - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^k - Z^\theta\right\|_2^2\right) d\theta.$$

Ainsi, par itérations successives,

$$\int_0^T \left(\left\|D_\theta Y^k - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^k - Z^\theta\right\|_2^2\right) d\theta$$

$$\leq \varepsilon + \alpha\varepsilon + \alpha^2\varepsilon + ... + \alpha^{k-1}\varepsilon + \alpha^k \int_0^T \left(\left\|D_\theta Y^0 - Y^\theta\right\|_{S^2}^2 + \left\|D_\theta Z^0 - Z^\theta\right\|_2^2\right) d\theta,$$

ce qui donne

$$\int_0^T \left(\left\| D_\theta Y^k - Y^\theta \right\|_{S^2}^2 + \left\| D_\theta Z^k - Z^\theta \right\|_2^2 \right) d\theta \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha} + \alpha^k M'',$$

avec $M'' \in \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, comme $\alpha < 1$,

$$(D_\theta Y^k, D_\theta Z^k) \underset{k \to +\infty}{\overset{L^a_{1,2}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} (Y^\theta, Z^\theta).$$

Or $L^a_{1,2}(\mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|\cdot\|^a_{1,2}$, donc

$$(Y^\theta, Z^\theta) \in L^a_{1,2}(\mathbb{R}).$$

De plus, comme D est un opérateur fermé de $L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2})$ dans $L^a_{1,2}(\mathbb{R})$, donc (Y^θ, Z^θ) est une version de $(D_\theta Y, D_\theta Z)$, ce qui montre la conclusion 2.
Il ne reste plus qu'à montrer la conclusion 3. On a, pour $t \leq s \in [0,T]$,

$$Y(s) = Y(t) - \int_t^s f(r, Y(r), Z(r))dt + \int_t^s Z(r)dW_r.$$

Donc, d'après le lemme précédent, pour $\theta \in]t, s]$,

$$\begin{aligned}
D_\theta Y(s) &= D_\theta Y(t) \\
&\quad - \int_t^s \left(\frac{\partial f}{\partial y}(r, Y^k(r), Z^k(r)) D_\theta Y^k(r) + \frac{\partial f}{\partial z}(r, Y^k(r), Z^k(r)) D_\theta Z^k(r) + D_\theta f(r, Y^k(r), Z^k(r)) \right) dr \\
&\quad + Z(\theta) + \int_\theta^s D_\theta Z(r) dW_r \\
&= 0 \\
&\quad - \int_t^s \left(\frac{\partial f}{\partial y}(r, Y^k(r), Z^k(r)) D_\theta Y^k(r) + \frac{\partial f}{\partial z}(r, Y^k(r), Z^k(r)) D_\theta Z^k(r) + D_\theta f(r, Y^k(r), Z^k(r)) \right) dr \\
&\quad + Z(\theta) + \int_\theta^s D_\theta Z(r) dW_r.
\end{aligned}$$

Ainsi, en particulier en $\theta = s$, on obtient

$$D_s Y(s) = \lim_{\theta \nearrow s} D_\theta Y(s) = Z(s).$$

□

Remarque 4.1.2.5. Si K_θ est borné alors il est suffisant de supposer $f(t,0,0) \in \mathbb{H}^2_T(\mathbb{R}^d)$ et $\xi \in L^2_T(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 4.1.2.6. Le fait que $D_t Y(t) = Z(t)$ révèle le lien entre le processus de richesse Y et la stratégie à avoir pour arriver à la richesse finale souhaitée que nous avons établi en section 2.2.

Remarque 4.1.2.7. Ce résulat peut être généralisé au cas $p \geq 2$.

4.1.3 Application au cas linéaire

Corollaire 4.1.3.1. Soit β un processus prévisible borné à valeurs réelles, γ un processus prévisible borné à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{H}^2_T(\mathbb{R})$ et $\xi \in L^2_T(\mathbb{R})$. On considère (Y,Z) la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dY_t = -(\varphi(t) + Y(t)\beta(t) + {}^tZ(t)\gamma(t))dt + {}^tZ(t)dW_t, \quad Y_T = \xi. \tag{2}$$

On suppose :

1. $\beta \in L^a_{1,4}(\mathbb{R})$, $\int_0^T \|D_\theta \beta\|_4^4 \, d\theta < +\infty$,
2. $\gamma \in L^a_{1,4}(\mathbb{R}^n)$, $\int_0^T \|D_\theta \gamma\|_4^4 \, d\theta < +\infty$,
3. $\varphi \in \mathbb{H}^4_T(\mathbb{R}) \cap L^a_{1,2}(\mathbb{R})$, $\int_0^T \|D_\theta \varphi\|_2^2 \, d\theta < +\infty$,

4. $\xi \in L^4([0,T]) \cap \mathbb{D}^{1,2}$, $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}((D_\theta \xi)^2) d\theta < +\infty$.

Alors :

1. $(Y, Z) \in L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2} \times \mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n))$,
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, une version de $(D^i_\theta Y(t), D^i_\theta Z(t))$ est donnée par, pour tout $t, \theta \in [0,T]$,
   (a) si $t < \theta$,
   $$D^i_\theta Y(t) = 0, D^i_\theta Z(t) = 0,$$
   (b) si $t \geq \theta$,
   $$\begin{aligned} D^i_\theta Y(t) &= D^i_\theta \xi \\ &+ \int_t^T \left(\beta(s) D^i_\theta Y(s) + {}^t\gamma(s) D^i_\theta Z(s) + D^i_\theta \varphi(s) + Y(s) D^i_\theta \beta(s) + {}^tZ(s) D^i_\theta \gamma(s)\right) ds \\ &- \int_t^T D^i_\theta({}^tZ(s)) dW_s \end{aligned}$$
3. $(D_t Y(t))_{t \in [0,T]}$ est une version de Z.

Démonstration. On considère la fonction aléatoire f définie par, pour tout $t \in [0,T], y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^n$,

$$f(t, y, z) = \varphi(t) + y\beta(t) + {}^tz\gamma(t).$$

Alors les paramètres f et ξ vérifient toutes les hypothèses du théorème précédent. On obtient alors le résultat souhaité car

$$D^i_\theta(f(t, Y(t), Z(t))) = D^i_\theta \varphi(t) + Y(t) D^i_\theta \beta(t) + \beta(t) D^i_\theta Y(t) + D^i_\theta({}^tZ(t))\gamma(t) + {}^tZ(t) D^i_\theta \gamma(t).$$

□

Remarque 4.1.3.2. Si les coefficients β et γ sont des fonctions déterministes bornées alors il suffit de supposer $\varphi \in \mathbb{H}^2_T(\mathbb{R}) \cap L^a_{1,2}(\mathbb{R})$ et $\xi \in L^2([0,T]) \cap \mathbb{D}^{1,2}$.

Remarque 4.1.3.3. On rappelle qu'au théorème précédent,

$$Y(t) = \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\varphi(s) ds \middle| \mathcal{F}_t\right),$$

avec $(\Gamma(t,s))_{0 \leq t \leq s \leq T}$ défini par l'équation différentielle stochastique

$$d\Gamma(t,s) = \Gamma(t,s)(\beta(s) ds + {}^t\gamma(s) dW_s), \quad \Gamma(t,t) = 1.$$

Autrement dit nous obtenons une expression du processus Y sans le processus Z.

Nous pouvons allons nous demander si nous pouvons faire de même avec DY. Peut-on l'exprimer sans DZ ? La réponse est oui et est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 4.1.3.4. Dans le cadre du théorème linéaire précédent, pour tout $\theta \leq t \in [0,T]$,

$$D_\theta Y(t) = \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T) D_\theta \xi + D_\theta \Gamma(t,T)\xi + \int_t^T (\Gamma(t,s) D_\theta \varphi(s) + \varphi(s) D_\theta \Gamma(t,s)) ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.2.2.4 et l'intégration par parties, nous avons

$$D_\theta Y(t) = \mathbb{E}\left(D_\theta\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\varphi(s) ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right),$$

et

$$D_\theta\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\varphi(s) ds\right) = \xi D_\theta \Gamma(t,T) + \Gamma(t,T) D_\theta \xi + \int_t^T (\varphi(s) D_\theta \Gamma(t,s) ds + \Gamma(t,s) D_\theta \varphi(s)) ds.$$

□

Nous pouvons même obtenir une expression de DY sans faire intervenir la dérivée $D\Gamma$.

Proposition 4.1.3.5. Dans le cadre du théorème linéaire précédent, pour tout $\theta \leq t \in [0,T]$, on a

$$D_\theta Y(t) = \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T)D_\theta\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)(D_\theta\varphi(s) + Y(s)D_\theta\beta(s))ds \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

$$+\mathbb{E}\left(\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\phi(s)ds\right)\left(\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)D_\theta\gamma(s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Démonstration. Le couple $(D_\theta Y, D_\theta Z)$ est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$D_\theta^i Y(t) = D_\theta^i\xi + \int_t^T \left(\beta(s)D_\theta^iY(s) + {}^t\gamma(s)D_\theta^iZ(s) + \tilde{\varphi}^i(s)\right)ds - \int_t^T D_\theta^i({}^tZ(s))dW_s, \qquad (3)$$

avec

$$\tilde{\varphi}^i(s) = D_\theta^i\varphi(s) + Y(s)D_\theta^i\beta(s) + {}^tZ(s)D_\theta^i\gamma(s).$$

Donc

$$D_\theta^iY(t) = \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T)D_\theta^i\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\tilde{\varphi}^i(s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T)D_\theta^i\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\left(D_\theta^i\varphi(s) + Y(s)D_\theta^i\beta(s) + {}^tZ(s)D_\theta^i\gamma(s)\right)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

De plus, en appliquant la formule d'Itô à $s \longmapsto \Gamma(t,s)Y(s)$,

$$\Gamma(t,T)Y(T) = \Gamma(t,t)Y(t) + \int_t^T \Gamma(t,s)dY(s) + \int_t^T Y(s)d\Gamma(t,s) + \langle \Gamma(t,\cdot), Y\rangle_T,$$

avec

$$Y(T) = \xi,$$

$$\Gamma(t,t) = 1,$$

$$\int_t^T \Gamma(t,s)dY(s) = -\int_t^T \Gamma(t,s)(\varphi(s) + Y(s)\beta(s) + {}^tZ(s)\gamma(s))ds + \int_t^T \Gamma(t,s)^tZ(s)dW_s,$$

$$\int_t^T Y(s)d\Gamma(t,s) = \int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)\beta(s)ds + \int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)dW_s,$$

et

$$\langle \Gamma(t,\cdot), Y\rangle_T = \int_t^T \Gamma(t,s)^t\gamma(s)Z(s)ds.$$

Ainsi

$$\Gamma(t,T)\xi = Y(t) - \int_t^T \Gamma(t,s)\varphi(s)ds + \int_t^T \underbrace{\left(\Gamma(t,s)^tZ(s) + Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)\right)}_{=:{}^t\xi(t,s)} dW_s$$

ce qui donne

$$Y(t) = \Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\varphi(s)ds - \int_t^T {}^t\xi(t,s)dW_s.$$

Or, en utilisant l'équation différentielle stochastique rétrograde (3) vérifiée par $(D_\theta^iY, D_\theta^iZ)$, nous avons

$$\Gamma(t,T)D_\theta^i\xi + \int_t^T (D_\theta^i\phi(s) + Y(s)D_\theta^i\beta(s) + {}^tZ(s)D_\theta^i\gamma(s))ds$$

$$= D_\theta^iY(t) + \int_t^T (\Gamma(t,s)^tD_\theta^iZ(s) + D_\theta^iY(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s))dW_s.$$

Donc

$$\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\phi(s)ds\right)\left(\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s\right) = Y(t)\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s + \int_t^T {}^t\xi(t,s)dW_s \int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s$$

$$= Y(t)\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s + \int_t^T \left(\Gamma(t,s)^tZ(s) + Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)\right)dW_s \int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s.$$

Or, en appliquant l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left(Y(t)\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s \mid \mathcal{F}_t\right) = Y(t)\mathbb{E}\left(\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s\middle|\mathcal{F}_t\right) = 0$$

car l'intégrale stochastique apparaissant est une martingale et nulle en $T = t$. De plus

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T \left(\Gamma(t,s)^tZ(s) + Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)\right)dW_s \int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_t^T (\Gamma(t,s)^tZ(s) + Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s))D_\theta\gamma(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_t^T \Gamma(t,s)^tZ(s)D_\theta\gamma(s)ds \mid \mathcal{F}_t\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)D_\theta\gamma(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\phi(s)ds\right)\left(\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_t^T \Gamma(t,s)^tZ(s)D_\theta\gamma(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)D_\theta\gamma(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Puis, en combinant avec le premier calcul de la démonstration,

$$D_\theta Y(t) = \mathbb{E}\left(\Gamma(t,T)D_\theta\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)(D_\theta\varphi(s) + Y(s)D_\theta\beta(s))ds\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

$$+\mathbb{E}\left(\left(\Gamma(t,T)\xi + \int_t^T \Gamma(t,s)\phi(s)ds\right)\left(\int_t^T {}^tD_\theta\gamma(s)dW_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Y(s)\Gamma(t,s)^t\gamma(s)D_\theta\gamma(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

□

4.1.4 Application au cas Markovien

On considère, pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^p$, l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dP_s = b(s,P(s))ds + \sigma(s,P(s))dW_s & t \leq s \leq T \\ P(s) = x & 0 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{4}$$

avec $b : [0,T] \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times n}$ fonctions continues et lipschitziennes en la seconde variable.

Remarque 4.1.4.1. Dans ce cas, cette équation différentielle stochastique admet une unique solution $(P^{t,x}(s))_{0\leq s\leq T}$.

On considère également l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$\begin{cases} dY_s = -f(s,P^{t,x}(s),Y(s),Z(s))ds + {}^tZ(s)dW_s & 0 \leq s \leq T \\ Y(T) = \psi(P^{t,x}(T)), \end{cases} \tag{5}$$

avec $f : [0,T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue et lipschitzienne en les deux dernières variables et $\psi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Remarque 4.1.4.2. Dans ce cas, cette équation différentielle stochastique rétrograde admet une unique solution $(Y^{t,x}(s), Z^{t,x}(s))_{0\leq s\leq T}$.

Proposition 4.1.4.3. Si les coefficients b, σ, f et ψ sont continûment différentiables alors :

1. pour tout $0 \le t \le s \le T$ et $x \in \mathbb{R}^p$,

$$(Y^{t,x}(s), Z^{t,x}(s)) \in L^2([0,T], (\mathbb{D}^{1,2})^d \times (\mathbb{D}^{1,2})^{n\times d},$$

2. pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, une version de $(D^i_\theta Y(s), D^i_\theta Z(s))_{0\le\theta, t\le s\le T}$ est donnée par :
   (a) pour $0 \le \theta < t \le T$ ou $s < \theta \le T$,

$$D^i_\theta Y_s = 0, \quad D^i_\theta Z_s = 0,$$

   (b) pour $0 \le t \le \theta \le T$, $(D^i_\theta Y_s, D^i_\theta Z_s)$ satisfait l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$\begin{cases} dD^i_\theta Y_s = & -\left(\partial_y f(s,P(s),Y(s),Z(s))D^i_\theta Y(s) + \partial_z f(s,P(s),Y(s),Z(s))D^i_\theta Z(s)\right) ds \\ & -\partial_x f(s,P(s),Y(s),Z(s))D^i_\theta P(s)ds + D^i_\theta{}^t Z(s)dW_s, \\ D^i_\theta Y(T) = & \psi'(P(T))D^i_\theta P(T). \end{cases}$$

   De plus $(D_s Y(s))_{t\le s\le T}$ est une version de $(Z(s))_{t\le s\le T}$.
3. $\lambda \otimes \mathbb{P}$-presque sûrement

$$Z^{t,x}(s) = \partial_x Y^{t,x}(s)(\partial_x P^{t,x}(s))^{-1}\sigma(s, P^{t,x}(s)).$$

Démonstration. Pour tout $0 \le t \le T$ et $x \in \mathbb{R}^p$, nous, d'après la proposition 4.1.4.3,

$$(P^{t,x}(s))_{0\le s\le T} \in L^2([0,T], (\mathbb{D}^{1,2})^p),$$

et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si $\theta < t$ alors

$$D^i_\theta P^{t,s}(s) = 0,$$

et sinon $\theta \ge t$ et, pour tout $s \in [\theta, T]$,

$$dD^i_\theta P(s) = \partial_x b(s,P(s))D^i_\theta P(s)ds + \sum_{j=1}^p \partial_x\sigma_j(s,P(s))D^i_\theta P(s)dW^j_s, \quad D^i_\theta P(\theta) = \sigma_i(\theta, P(\theta)). \tag{6}$$

De plus, par unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (6), comme le processus

$$\Psi : s \longmapsto \partial_x P(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta))$$

vérifie également la même équation différentielle stochastique, on en déduit

$$D_\theta P(s) = \Psi(s) = \partial_x P(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)).$$

En effet

$$\Psi(\theta) = \partial_x P(\theta)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)) = \sigma(\theta, P(\theta)),$$

et, pour tout $s \in [\theta, T]$, d'après l'équation différentielle stochastique vérifiée par P,

$$d\partial_x P_s = \partial_x b(s,P(s))\partial_x P(s)ds + \sum_{j=1}^p \partial_x\sigma_j(s,P(s))\partial_x P(s)dW^j_s,$$

interversion est justifiée dans le livre de Philip Protter [10], d'où, en multipliant par $(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta))$,

$$d\Psi_s = \partial_x b(s,P(s))\Psi(s)ds + \sum_{j=1}^p \partial_x\sigma_j(s,P(s))\Psi(s)dW^j_s.$$

De plus

$$\sup_{t\le s\le T}(\|P(s)\| + \|\partial_x P(s)\|) \in L^p(\Omega).$$

On en déduit que toutes les hypothèses du théorème 4.1.2.4 sont vérifiées, ce qui prouve 1 et 2.
Puis, par unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (5) vérifiée par (Y, Z), on en déduit

$$D_\theta Y(s) = \partial_x Y(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)).$$

En effet si l'on note
$$\varphi : s \longmapsto \partial_x Y(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)).$$
Alors on a
$$\begin{aligned}\varphi(T) = \partial_x Y(T)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)) &= \psi'(P(T))\partial_x P(T)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)) \\ &= \psi'(P(T))\Psi(T) = \psi'(P(T))D_\theta P(T),\end{aligned}$$
et, pour tout $s \in [\theta, T]$,
$$\begin{aligned}d\partial_x Y(s) = &-\partial_x f(s, P(s), Y(s), Z(s))\partial_x P(s)ds - \partial_y f(s, P(s), Y(s), Z(s))\partial_x Y(s)ds \\ &-\partial_z f(s, P(s), Y(s), Z(s))\partial_x Z(s)ds + {}^t\partial_x Z(s)dW_s,\end{aligned}$$
d'où, en multipliant par $(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta))$,
$$\begin{aligned}d\varphi(s) = &-\partial_x f(s, P(s), Y(s), Z(s))\Psi(s)ds - \partial_y f(s, P(s), Y(s), Z(s))\varphi(s)ds \\ &-\partial_z f(s, P(s), Y(s), Z(s))\partial_x Z(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta))ds + {}^t\partial_x Z(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}dW_\theta,\end{aligned}$$
i.e.
$$\begin{aligned}d\varphi(s) = &-\partial_x f(s, P(s), Y(s), Z(s))\Psi(s)ds - \partial_y f(s, P(s), Y(s), Z(s))\varphi(s)ds \\ &-\partial_z f(s, P(s), Y(s), Z(s))\tilde{Z}(s)ds + {}^t\tilde{Z}(s)dW_\theta,\end{aligned}$$
avec
$$\tilde{Z}(s) = \partial_x Z(s)(\partial_x P(\theta))^{-1}\sigma(\theta, P(\theta)),$$
ce qui montre bien que le couple $(\varphi, \tilde{Z})$ vérifie la même équation différentielle stochastique rétrograde que le couple $(D_\theta Y, D_\theta Z)$. En particulier, en $\theta = s$, on a
$$Z(s) = D_s Y(s) = \varphi(s) = \partial_x Y(s)(\partial_x P(s))^{-1}\sigma(s, P(s)),$$
ce qui montre la fin de 2 et 3. □

4.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec condition finale singulière

Nous allons dans cette section nous intéresser à des équations différentielles stochastiques rétrogrades dont la condition finale peut ne pas être intégrable voire même infini. A partir de la résolution de celle-ci nous pouvons en déduire des résultats concernant la liquidation d'actifs financiers reliée à une équation différentielle stochastique rétrograde de condition terminale singulière. Comme vu précédemment, le calcul de Malliavin servira à interpréter la dérivée de Malliavin de la solution Y comme le processus Z.

4.2.1 Premier exemple

Commençons par étudier un premier exemple avec des coefficients bien particuliers. On considère deux processus progressivement mesurables $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$. Remarquons que dans cette section nous noterons la dépendance des processus en t en indice pour simplifier les notations étant donnée que nous allons considérer des solutions d'équations différentielles rétrogrades avec condition finale classique et générateur modifié.

Définition 4.2.1.1. On dit qu'un couple (Y, Z) de processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde
$$dY_t = \left((p-1)Y_t\frac{|Y_t|^{q-1}}{\eta_t^{q-1}} - \gamma_t\right)dt + \langle Z_t, dW_t\rangle \tag{7}$$
avec condition finale singulière $Y_T = \xi$, où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et ξ une variable aléatoire positive vérifiant $\mathbb{P}(\xi = +\infty) > 0$, si :

1. pour tout $0 \leq s \leq t < T$,
$$Y_s = Y_t - \int_s^t \left((p-1)Y_r\frac{|Y_r|^{q-1}}{\eta_r^{q-1}} - \gamma_r\right)dr - \int_s^t \langle Z_r, dW_r\rangle,$$

2. pour tout $0 \leq t < T$,
$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|Y_s|^2 + \int_0^t \|Z_r\|^2\, dr\right) < +\infty,$$

3. on a la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre
$$\liminf_{t\to T}(Y_t) \geq \xi.$$

Définition 4.2.1.2. Pour $t \in [0,T]$, les espaces $\mathcal{M}^1(0,t)$ et $\mathcal{M}^2(0,t)$ sont définis par
$$\mathcal{M}^i(0,t) = L^i(\Omega \times [0,t], \mathcal{P}, \mathbb{P}\otimes\lambda),$$
avec $\mathcal{P}$ la tribu engendrée par les sous-ensembles de $\Omega \times [0,t]$ progressivement mesurables.

Théorème 4.2.1.3. On suppose les conditions d'intégrabilité suivantes :

1. $\eta \in \mathcal{M}^2(0,T)$ et $\dfrac{1}{\eta^{q-1}} \in \mathcal{M}^1(0,T)$,
2. $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T (T-s)^p \gamma_s ds\right)^2\right) < +\infty.$

Alors il existe une solution (Y,Z) à l'équation différentielle stochastique rétrograde (7) avec condition finale singulière $Y_T = \xi$.

Démonstration. Procédons en plusieurs étapes :
Etape 1 : Construction d'une solution avec une condition finale finie $L \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde
$$dY_t^L = \left((p-1)Y_t^L \frac{|Y_t^L|^{q-1}}{\eta_t^{q-1}} - (\gamma_t \wedge L)\right)dt + \langle Z_t^L, dW_t\rangle, \quad Y_T^L = L\wedge\xi. \tag{8}$$
Montrons qu'il existe une unique solution (Y^L, Z^L) à cette équation avec $Z^L \in \mathcal{M}^2(0,T)$.
Commençons par noter le générateur de l'équation différentielle stochastique rétrograde
$$f(t,y) = -(p-1)y\frac{|y|^{q-1}}{\eta_t^{q-1}} + \gamma_t \wedge L,$$
et, pour $\delta \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f^\delta(t,y) = -(p-1)y\frac{|y|^{q-1}}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}} + (\gamma_t\wedge L).$$
Alors la fonction $f^\delta(\cdot,\cdot\vee 0)$ vérifie l'hypothèse de monotonie théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde associée, résultat détaillé à la section 2.2 des notes de cours de B. Bouchard [3]. Ainsi il existe $(Y^{\delta,L}, Z^{\delta,L})$ solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde de paramètres $(f^\delta(\cdot,\cdot\vee 0), L)$, de plus
$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{\delta,L}|^2 + \int_0^T \left\|Z_t^{\delta,L}\right\|^2 dt\right) < +\infty.$$
En particulier pour $L = 0$ la solution est $(Y^{\delta,0}, Z^{\delta,0}) = (0,0)$. Ainsi, par théorème de comparaison, pour $L \geq 0$,
$$Y^{\delta,L} \geq 0,$$
puis $(Y^{\delta,L}, Z^{\delta,L})$ est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde de paramètres (f^δ, L).
De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,
$$f^\delta(t,y) \leq L.$$
Donc, en appliquant le théorème de comparaison avec $(Y^{\delta^L}, Z^{\delta,L})$ et $((1+t)L, 0)$ couple solution de l'équation différentielle stochastique de paramètres (L,L), on obtient
$$Y_t^{\delta,L} \leq (1+T-t)L \leq (1+T)L.$$

De même, comme $\delta \longmapsto f^\delta$ est décroissant, par théorème de comparaison,

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Longrightarrow Y^{\delta_1,L} \leq Y^{\delta_2,L}.$$

On considère alors Y^L la limite décroissante des $Y^{\delta,L}$ pour $\delta \to 0$. Pour construire Z^L, considérons $Z^{\delta_n,L}$ pour $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et montrons que $(Z^{\delta_n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(0,T)$. Soit $n \geq m$. D'après la formule d'Itô appliquée à $(Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})^2$, nous avons

$$(Y_T^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})^2 = (Y_0^{\delta_n,L} - Y_0^{\delta_m,L})^2 + 2\int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L}) d(Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L}) + \int_0^T d\langle Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L}\rangle,$$

avec

$$Y_T^{\delta_n,L} = L \wedge \xi = Y_T^{\delta_m,L},$$

$$d(Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L}) = -(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L}))dt + \langle Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L}, dW_t\rangle,$$

et

$$d\langle Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L}\rangle = (Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L})^2 dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 = (Y_0^{\delta_n,L} - Y_0^{\delta_m,L})^2 &- 2\int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L}))dt \\ &+ \int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})\langle Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L}, dW_t\rangle + \int_0^T (Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L})^2 dt, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \int_0^T (Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L})^2 dt = -(Y_0^{\delta_n,L} - Y_0^{\delta_m,L})^2 &+ 2\int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L}))dt \\ &- \int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})\langle Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L}, dW_t\rangle. \end{aligned}$$

Or le dernier terme est d'espérance nulle car il s'agit d'une martingale issue de 0 car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left\langle \int_0^\cdot (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})\langle Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L}, dW_t\rangle \right\rangle_T\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})^2 \left\| Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L} \right\|^2 dt\right) \\ &\leq 4(1+T)^2 L^2 \mathbb{E}\left(\int_0^T \left\| Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L} \right\|^2 dt\right) < +\infty. \end{aligned}$$

De plus, f^{δ_m} est décroissante en la seconde variable et $Y^{\delta_n,L} \leq Y^{\delta_m,L}$, donc

$$f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L}) \leq f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_n,L}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \underbrace{(Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})}_{\leq 0}(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L})) &\leq (Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_n,L})) \\ &= (p-1)(Y_t^{\delta_m,L} - Y_t^{\delta_n,L})(Y_t^{\delta_n,L})^q \left(\frac{1}{(\eta_t \vee \delta_n)^{q-1}} - \frac{1}{(\eta_t \vee \delta_m)^{q-1}}\right), \end{aligned}$$

avec

$$Y_t^{\delta_m,L}, Y_t^{\delta_n,L} \leq (T+1)L,$$

d'où

$$(Y_t^{\delta_n,L} - Y_t^{\delta_m,L})(f^{\delta_n}(t, Y_t^{\delta_n,L}) - f^{\delta_m}(t, Y_t^{\delta_m,L})) \leq C\left(\frac{1}{(\eta_t \vee \delta_n)^{q-1}} - \frac{1}{(\eta_t \vee \delta_m)^{q-1}}\right).$$

Par conséquent en appliquant l'espérance aux calculs précédents on obtient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left\| Z_t^{\delta_n,L} - Z_t^{\delta_m,L} \right\|^2 dt\right) \leq -\underbrace{\mathbb{E}\left((Y_0^{\delta_n,L} - Y_0^{\delta_m,L})^2\right)}_{\geq 0} + 2C\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\frac{1}{(\eta_t \vee \delta_n)^{q-1}} - \frac{1}{(\eta_t \vee \delta_m)^{q-1}}\right) dt\right)$$

$$\leq 2C\mathbb{E}\left(\int_0^T\left(\frac{1}{(\eta_t\vee\delta_n)^{q-1}}-\frac{1}{(\eta_t\vee\delta_m)^{q-1}}\right)dt\right).$$

Or $\mathbb{P}\otimes\lambda$-presque partout

$$\frac{1}{(\eta_t\vee\delta_n)^{q-1}}-\frac{1}{\eta_t^{q-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

et, en utilisant l'hypothèse 1,

$$\left|\frac{1}{(\eta_t\vee\delta_n)^{q-1}}-\frac{1}{\eta_t^{q-1}}\right|\leq 2\frac{1}{\eta^{q-1}}\in\mathcal{M}^1(0,T).$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\frac{1}{(\eta\vee\delta_n)^{q-1}}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{M}^1(0,T)}{\longrightarrow}}\frac{1}{\eta^{q-1}}.$$

En particulier il s'agit d'une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^1(0,T)$ puis $(Z^{\delta_n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ également dans $\mathcal{M}^2(0,T)$, donc convergente vers $Z^L\in\mathcal{M}^2(0,T)$.
Essayons de passer à la limite $\mathbb{P}$-presque sûre dans

$$Y_t^{\delta_n,L}=L\wedge\xi-(p-1)\int_t^T\frac{(Y_s^{\delta_n,L})^q}{(\eta_s\vee\delta_n)^{q-1}}ds+\int_t^T(\gamma_s\wedge L)ds-\int_t^T Z_s^{\delta_n,L}dW_s.$$

Pour le premier terme, nous avons directement

$$Y_t^{\delta_n,L}\underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}}Y_t^L.$$

Pour le second terme, nous avons $\mathbb{P}\otimes\lambda$-presque partout

$$\frac{(Y_s^{\delta_n,L})^q}{(\eta_s\vee\delta_n)^{q-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{(Y_s^L)^q}{\eta_s^{q-1}},$$

et, par l'hypothèse 1,

$$\left|\frac{(Y_s^{\delta_n,L})^q}{(\eta_s\vee\delta_n)^{q-1}}\right|\leq(1+T)^qL^q\frac{1}{\eta_s^{q-1}}\in L^1([t,T]).$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_t^T\frac{(Y_s^{\delta_n,L})^q}{(\eta_s\vee\delta_n)^{q-1}}ds\underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}}\int_t^T\frac{(Y_s^L)^q}{\eta_s^{q-1}}ds.$$

Pour le dernier terme, par isométrie d'Itô,

$$\int_t^T\langle Z_s^{\delta_n,L},dW_r\rangle\underset{n\to+\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}}\int_t^T\langle Z_s^L,dW_s\rangle.$$

Ainsi, il existe une extractrice $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que

$$\int_t^T\langle Z_s^{\delta_{\varphi(n)},L},dW_r\rangle\underset{n\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}}\int_t^T\langle Z_s^L,dW_s\rangle.$$

Par conséquent, à partir d'une extraction, nous obtenons

$$Y_t^L=L\wedge\xi-(p-1)\int_t^T\frac{(Y_s^L)^q}{\eta_s^{q-1}}ds+\int_t^T(\gamma_s\wedge L)ds-\int_t^T\langle Z_s^L,dW_s\rangle.$$

Ainsi (Y^L,Z^L) satisfait l'équation différentielle stochastique rétrograde (8).
Etape 2 : Minoration de Y_t^L. Montrons que l'on a la minoration suivante, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\left(\frac{1}{(L\wedge\xi)^{q-1}}+\mathbb{E}\left(\int_t^T\frac{ds}{\eta_s^{q-1}}\mid\mathcal{F}_t\right)\right)^{1-p}\leq Y_t^L.$$

On note
$$V_t = \frac{1}{(L\wedge\xi)^{q-1}} + \mathbb{E}\left(\int_t^T \frac{ds}{(\eta_s\vee\delta)^{q-1}} \mid \mathcal{F}_t\right).$$
Alors le processus V vérifie l'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire
$$dV_t = -\frac{1}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}}dt + \overline{Z}_t dW_t,$$
avec $\overline{Z} \in \mathcal{M}^2(0,t)$. En effet cette équation différentielle stochastique rétrograde linéaire admet pour solution
$$\overline{V}_t = \overline{\Gamma}_t^{-1}\mathbb{E}\left(\overline{\Gamma}_T\overline{V}_T + \int_t^T \overline{\Gamma}_s\frac{1}{(\eta_s\vee\delta)^{q-1}}ds\middle|\mathcal{F}_t\right),$$
avec
$$\overline{\Gamma}_t = \exp\left(-\int_0^t 0\times ds\right) = 1.$$
Donc nous avons bien $\overline{V} = V$. Puis notons
$$U_t = \frac{1}{V_t^{p-1}} = V_t^{-p+1}.$$
Alors, d'après la formule d'Itô,
$$dU_t = -(p-1)V_t^{-p}dV_t + \frac{1}{2}p(p-1)V_t^{-p-1}d\langle V_t, V_t\rangle$$
$$= (p-1)U_t^q\frac{1}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}}dt - (p-1)V_t^{-p}\overline{Z}_t dW_t + \frac{1}{2}p(p-1)U_t^{\frac{p+1}{p-1}}\overline{Z}_t^2 dt.$$
Or, d'après la définition de V_t,
$$\frac{1}{L^{q-1}} \leq V_t.$$
Donc
$$U_t \leq L^{(-q+1)(-p+1)} = L.$$
Ainsi
$$U_t = U_t\wedge L,$$
et
$$dU_t = -h(t,U_t,\widetilde{Z}_t)dt + \widetilde{Z}_t dW_t,$$
avec
$$h(t,u,z) = -(p-1)\frac{(u\wedge L)^q}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}} - \frac{1}{2}p(p-1)(u\wedge L)^{\frac{p+1}{p-1}}z^2,$$
et
$$\widetilde{Z}_t = -(p-1)V_t^{-p}\overline{Z}_t.$$
Alors
$$h(t,u,z) \leq -(p-1)\frac{(u\wedge L)^q}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}} \leq -(p-1)\frac{u^q}{(\eta_t\vee\delta)^{q-1}} + \underbrace{\gamma_t\wedge L}_{\geq 0} = f^\delta(t,u).$$
De plus
$$U_T = V_T^{-p+1} = L^{(q-1)(p-1)} = L = Y_T^{\delta,L}.$$
Donc, par théorème de comparaison,
$$U_t \leq Y_t^{\delta,L}.$$
Donc, en faisant tendre δ vers 0, nous obtenons l'inégalité souhaitée.
<u>Etape 3</u> : Majoration de Y_t^L. Montrons que l'on a la majoration suivante, pour tout $t\in[0,T]$,
$$Y_t^L \leq (1+T)L\wedge\frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\int_t^T(\eta_s + (T-s)^p\gamma_s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

On considère une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de paramètres $(g, Y^{\delta,L}_{T-\varepsilon})$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ et

$$g(t,y) = -p\frac{y}{T-t} + \frac{\eta_t \vee \delta}{(T-t)^p} + \gamma_t.$$

On note ψ^ε la solution. Alors, par théorème sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires,

$$\psi^\varepsilon_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\Gamma_{T-\varepsilon}Y^{\delta,L}_{T-\varepsilon} + \int_t^{T-\varepsilon} \Gamma_s\left(\frac{\eta_s \vee \delta}{(T-s)^p} + \gamma_s\right) ds \middle| \mathcal{F}_t\right),$$

avec

$$\Gamma_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{p}{T-s}ds\right) = \exp\left(p\left[\ln(T-s)\right]_0^t\right) = \left(\frac{T-t}{T}\right)^p.$$

Or, pour tout $y, b \in \mathbb{R}_+$,

$$by \leq \frac{b^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Donc, pour tout $y, a \in \mathbb{R}_+$, en appliquant l'inégalité précédente à $b = a^{q-1}$,

$$a^{q-1}y \leq \frac{a^{(q-1)p}}{p} + \frac{y^q}{q} = \frac{a^q}{p} + \frac{p-1}{p}y^q,$$

i.e.

$$(p-1)y^q - pa^{q-1}y + a^q \geq 0.$$

Ainsi, pour $a = (\eta_t \vee \delta)(T-t)^{-\frac{p}{q}}$,

$$f^\delta(t,y) = -(p-1)\frac{y^q}{(\eta_t \vee \delta)^{q-1}} + \underbrace{\gamma_t \wedge L}_{\leq \gamma_t} \leq -p\frac{y}{T-t} + \frac{\eta_t \vee \delta}{(T-t)^p} + \gamma_t = g(t,y).$$

Donc, par théorème de comparaison,

$$\begin{aligned} Y^{\delta,L}_t \leq \psi^\varepsilon_t &= \left(\frac{T-t}{T}\right)^{-p}\mathbb{E}\left(\left(\frac{T-T+\varepsilon}{T}\right)^p Y^{\delta,L}_{T-\varepsilon} + \int_t^{T-t}\left(\frac{T-s}{T}\right)^p\left(\frac{\eta_s \vee \delta}{(T-s)^p} + \gamma_s\right) ds \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\varepsilon^p Y^{\delta,L}_{T-\varepsilon} + \int_t^{T-t}\left(\eta_s \vee \delta + (T-s)^p\gamma_s\right) ds \middle| \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre ε vers 0, par théorème de convergence dominée, nous obtenons

$$Y^{\delta,L}_t \leq \frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\int_t^T (\eta_s \vee \delta + (T-s)^p\gamma_s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Puis, en faisant tendre δ vers 0,

$$Y_t \leq \frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p\gamma_s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

De plus, d'après l'étape 1, nous avons

$$Y^L_t \leq (T+1)L.$$

Donc

$$Y^L_t \leq (1+T)L \wedge \frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p\gamma_s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Etape 4 : Construction de la solution avec condition terminale singulière.
La fonction $L \longmapsto Y^L_t$ est croissante par théorème de comparaison. De plus, grâce à l'étape 3, nous avons la majoration suivante indépendante de L

$$Y^L_t \leq \frac{1}{(T-t)^p}\mathbb{E}\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p\gamma_s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

On peut donc considérer Y_t la limite croissante des Y_t^L quand $L \longrightarrow +\infty$. On a également, par inégalité de Jensen conditionnelle,

$$\mathbb{E}((Y_t^L)^2) \leq \frac{1}{(T-t)^{2p}}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p \gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right)^2\right) \leq \frac{1}{(T-t)^{2p}}\mathbb{E}\left(\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p \gamma_s ds\right)^2\right),$$

avec, grâce aux hypothèses du théorème,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_t^T (\eta_s + (T-s)^p \gamma_s ds\right)^2\right) < +\infty.$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$Y_t^L \underset{L\to+\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} Y_t.$$

De plus, en faisant tendre L vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue à l'étape 2, on obtient l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi^{q-1}} + \int_t^T \frac{ds}{\eta_s^{q-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right)^{1-p} \leq Y_t,$$

avec, comme $\frac{1}{\eta^{q-1}} \in \mathcal{M}^1(0,T)$,

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T \frac{ds}{\eta_s^{q-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{ds}{\eta_s^{q-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right) - \int_0^t \frac{ds}{\eta_s^{q-1}} =: M_t - A_t.$$

Ainsi, par continuité,

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T \frac{ds}{\eta_s^{q-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right) \underset{t\to T}{\longrightarrow} M_T - A_T = 0.$$

Par conséquent, d'après l'inégalité précédente,

$$\liminf_{t\to T}(Y_t) \geq \xi,$$

on a donc montré que Y vérifiait la condition finale singulière.
Ensuite, pour construire Z, montrons que $(Z^L)_{L\in\mathbb{R}_+^*}$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(0,t)$ pour tout $t \in [0,T[$.
Soit $0 \leq s \leq t < T$ et $N \geq L \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule d'Itô appliqué à $(Y^N - Y^L)^2$, nous avons

$$(Y_t^N - Y_t^L)^2 = (Y_s^N - Y_s^L)^2 + 2\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)d(Y_r^N - Y_r^L) + \int_s^t d\langle Y_r^N - Y_r^L\rangle.$$

Donc, en utilisant les équations différentielles stochastiques vérifiées par Y^N et Y^L, on obtient

$$(Y_s^N - Y_s^L)^2 + \int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr$$

$$= (Y_t^N - Y_t^L)^2 - 2\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle + 2\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(f^N(r,Y_r^N) - f^L(r,Y_r^L))dr,$$

avec, pour le dernier terme, par décroissance de $f^L(r,y)$ en y,

$$\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(f^N(r,Y_r^N) - f^L(r,Y_r^L))dr$$

$$\leq \int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(f^N(r,Y_r^N) - f^L(r,Y_r^N))dr = \int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L)dr.$$

Pour le second terme, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\left\langle \int_s (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle\right\rangle_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)^2 \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)$$

$$\leq 4(1+T)^2 L^2 \mathbb{E}\left(\int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right) < +\infty.$$

Donc $\displaystyle\int_s (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle$ est une martingale issue de 0 en $t = s$, en particulier d'espérance nulle

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle\right) = 0.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right) \leq \mathbb{E}\left((Y_s^N - Y_s^L)^2 + \int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left((Y_t^N - Y_t^L)^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L) dr\right).$$

De plus, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour $p = 1$, nous avons également

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle\right)\right) \leq C_1 \mathbb{E}\left(\left\langle \int_0^{\cdot} (Y_r^N - Y_r^L)\langle Z_r^N - Z_r^L, dW_r\rangle \right\rangle_t^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= C_1 \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)^2 \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

On en déduit donc l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^L - Y_s^N)^2 + \int_0^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)$$

$$\leq \mathbb{E}((Y_t^N - Y_t^L)^2) + 2C_1 \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)^2 \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L) dr\right).$$

Or, par inégalité de Young,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Donc, en appliquant cette inégalité avec

$$p = 2 = q, a = \frac{1}{\sqrt{2C_1}} \sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L), b = \sqrt{2C_1}\left(\int_0^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)^2 \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{4C_1}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right) + C_1 \mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right).$$

Par conséquent, en combinant les inégalités obenues, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right)$$

$$\leq \mathbb{E}((Y_t^N - Y_t^L)^2) + 2C_1 \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)^2 \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L) dr\right)$$

$$\leq \mathbb{E}((Y_t^N - Y_t^L)^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right) + 2C_1^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L) dr\right)$$

$$\leq (1 + 2C_1^2)\mathbb{E}((Y_t^N - Y_t^L)^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right) + (4C_1^2 + 2)\mathbb{E}\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L) dr\right).$$

Donc nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)\le 2(1+2C_1^2)\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)+4(2C_1^2+1)\mathbb{E}\left(\int_0^t(Y_r^N-Y_r^L)(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right),$$

puis, en notant $C_2=4(2C_1^2+1)$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)\le C_2\mathbb{E}\left((Y_t^N-Y_t^L)^2\right)+C_2\mathbb{E}\left(\int_0^t(Y_r^N-Y_r^L)(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right).$$

De plus, d'après l'inégalité de Young avec

$$p=2=q, a=\frac{1}{\sqrt{2C_2}}\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L), b=\sqrt{2C_2}\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr,$$

nous avons

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t(Y_r^N-Y_r^L)(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)\le\frac{1}{4C_2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)+C_2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)^2\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)\le C_2\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)+\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)+C_2^2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)^2\right),$$

i.e., en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)&\le\frac{4C_2}{3}\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)+\frac{4C_2^2}{3}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)^2\right),\\&\le\frac{4C_2}{3}\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)+\frac{4T^2C_2^2}{3}\mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)^2dr\right)\end{aligned}$$

i.e., en notant $C_3=\frac{4}{3}\max(C_2,T^2C_2^2)$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)\le C_3\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)+C_3\mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)^2dr\right).$$

Or $Y_t\underset{L\to+\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}}Y_t$, donc

$$\mathbb{E}((Y_t^N-Y_t^L)^2)\underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

De plus

$$\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L\underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

et

$$|\gamma\wedge N-\gamma\wedge L|\le 2\gamma\in\mathcal{M}^2(0,T).$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)\right)^2dr\underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)\underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Or

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t(Y_r^N-Y_r^L)(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)\le\frac{1}{4C_2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}(Y_s^N-Y_s^L)^2\right)+C_2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t(\gamma_r\wedge N-\gamma_r\wedge L)dr\right)^2\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L)dr\right) \underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, à partir de

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right) \leq \mathbb{E}\left((Y_t^N - Y_t^L)^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_s^t (Y_r^N - Y_r^L)(\gamma_r \wedge N - \gamma_r \wedge L)dr\right),$$

et de

$$0 \leq \mathbb{E}\left((Y_t^N - Y_t^L)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}(Y_s^N - Y_s^L)^2\right) \underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

nous obtenons finalement

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \left\|Z_r^N - Z_r^L\right\|^2 dr\right) \underset{N,L\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $(Z^L)_{L\in\mathbb{R}_+^*}$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(0,t)$ complet donc converge vers $Z \in \mathcal{M}^2(0,t)$. Nous avons en particulier montré que $(Y^L)_{L\in\mathbb{R}_+^*}$ est de Cauchy pour la norme $\mathbb{E}\left(\sup_{[0,t]}(\cdot)^2\right)$ donc converge, vers Y, donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} Y_s^2\right) < +\infty.$$

Terminons cette démonstration en vérifiant que le couple (Y, Z) vérifie bien l'équation (7) souhaitée. Nous avons, d'après la première étape, pour tout $s \leq t < T$,

$$Y_t^L = L \wedge \xi - (p-1)\int_t^T \frac{(Y_r^L)^q}{\eta_r^{q-1}}dr + \int_t^T (\gamma_r \wedge L)dr - \int_t^T \langle Z_r^L, dW_r\rangle,$$

$$Y_s^L = L \wedge \xi - (p-1)\int_s^T \frac{(Y_r^L)^q}{\eta_r^{q-1}}dr + \int_s^T (\gamma_r \wedge L)dr - \int_s^T \langle Z_r^L, dW_r\rangle.$$

Donc

$$Y_t^L - Y_s^L = (p-1)\int_s^t \frac{(Y_r^L)^q}{\eta_r^{q-1}}dr + \int_s^t (\gamma_r \wedge L)dr - \int_s^t \langle Z_r^L, dW_r\rangle,$$

avec la convergence presque sûre uniforme sur $[s,t]$, $Y^L \underset{L\to+\infty}{\overset{PS,CVU}{\longrightarrow}} Y$, donc

$$\int_s^t \frac{(Y_r^L)^q}{\eta_r^{q-1}}dr \underset{L\longrightarrow+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} \int_s^t \frac{Y_r^q}{\eta_r^{q-1}}dr.$$

De plus

$$\int_s^t (\gamma_r \wedge L)dr \underset{L\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} \int_s^t \gamma_r dr,$$

et, par isométrie d'Itô,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t \langle Z_r^L, dW_r\rangle - \int_s^t \langle Z_r, dW_r\rangle\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t \langle Z_r^L - Z_r, dW_r\rangle\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t \left\|Z_r^L - Z_r\right\|^2 dr\right) \underset{L\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\int_s^t \langle Z_r^{\varphi(L)}, dW_r\rangle \underset{L\to+\infty}{\overset{PS}{\longrightarrow}} \int_s^t \langle Z_r, dW_r\rangle.$$

Par conséquent, en faisant tendre L vers $+\infty$ dans

$$Y_t^{\varphi(L)} - Y_s^{\varphi(L)} = (p-1)\int_s^t \frac{(Y_r^{\varphi(L)})^q}{\eta_r^{q-1}}dr + \int_s^t (\gamma_r \wedge \varphi(L))dr - \int_s^t \langle Z_r^{\varphi(L)}, dW_r\rangle,$$

on obtient

$$Y_t - Y_s = (p-1)\int_s^t \frac{Y_r^q}{\eta_r^{q-1}}dr + \int_s^t \gamma_r dr - \int_s^t \langle Z_r, dW_r\rangle,$$

ce qui montre bien que le couple (Y, Z) est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (7) avec condition finale singulière. □

Puis, comme pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades, nous avons un résultat de type comparaison.

Proposition 4.2.1.4. Avec les hypothèses du théorème précédent, la solution (Y, Z) est minimale : si (Y', Z') est une solution positive de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition finale singulière alors $Y' \geq Y$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et (Y^n, Z^n) les solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition finale $\xi \wedge n$ et générateur $f(y) = y|y|^q$. Or l'équation différentielle stochastique rétrograde de générateur f et de condition finale n admet comme solution $\left(\left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}}, 0\right)$. En effet

$$\left(\frac{1}{q(T-T)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}} = n,$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)\left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}-1} = \left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}+1}.$$

Or $\xi \wedge n \leq n$, donc, par théorème de comparaison,

$$Y_t^n \leq \left(\frac{1}{q(T-t)+\frac{1}{n^q}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq n.$$

Puis, pour $0 \leq t \leq s < T$,

$$\overline{Y}_t - Y_t = \overline{Y}_s - Y_s - \int_t^s \alpha_r^n(\overline{Y}_r - Y_r^n)dr - \int_t^s (\overline{Z}_r - Z_r^n)dW_r,$$

avec

$$\alpha_r^n = \begin{cases} \dfrac{\overline{Y}_r^{1+q} - (Y_r^n)^{1+q}}{\overline{Y}_r - Y_r^n} & \text{si} \quad \overline{Y}_r - Y_r^n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \overline{Y}_r - Y_r^n = 0 \end{cases}$$

Le processus α^n est progressivement mesurable, positif et, par inégalité des accroissements finis,

$$\alpha_r^n \leq (1+q)\left(\overline{Y}_r \vee Y_r^n\right)^q.$$

Alors, par linéarité et monotonie du générateur $(r, y) \longmapsto \alpha_r^n y$,

$$\overline{Y}_t - Y_t = \mathbb{E}\left((\overline{Y}_s - Y_s^n)\exp\left(-\int_t^s \alpha_r^n dr\right)\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Ainsi, en passant à la limite inférieure et en utilisant le lemme de Fatou conditionnel,

$$\begin{aligned}\overline{Y}_t - Y_t^n &= \liminf_{s\to T}\left(\mathbb{E}\left((\overline{Y}_s - Y_s^n)\exp\left(-\int_t^s \alpha_r^n dr\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left(\liminf_{s\to T}\left((\overline{Y}_s - Y_s^n)\exp\left(-\int_t^s \alpha_r^n dr\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)\right) \geq 0\end{aligned}$$

car les conditions terminales des processus vérifient

$$\xi - \xi \wedge n \geq 0.$$

Par conséquent, Y étant la limite des Y^n, nous obtenons $\overline{Y} \geq Y$. □

4.2.2 Utilisation en liquidation d'actifs financiers

On considère un investisseur avec un actif financier dont la stratégie est noté $(x_t)_{t\in[0,T]}$ et dont la quantité initiale est q_0. On a alors

$$x_t = q_0 + \int_0^t x'_s ds.$$

On suppose de plus que l'investisseur souhaite liquider son actif à l'instant final T i.e.

$$x_T = 0.$$

Cependant la volonté de vendre son actif impacte le prix de celui-ci, la relation entre l'offre et la demande varie donc la valeur de l'actif également. On suppose que l'impact au temps t est de la forme $\eta_t \mathrm{sign}(x'_t)|x'_t|^{p-1}$ avec $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ processus positif progressivement mesurable et que le coût lié à l'impact de la stratégie x est

$$\int_0^T \eta_t |x'_t|^p dt.$$

De plus dans un tel problème il y a un risque associé à la taille du portefeuille qui va être interprété par un terme de la forme

$$\int_0^T \gamma_t |x_t|^p dt,$$

avec $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$ processus positif progressivement mesurable. En effet l'investisseur ne va pas avoir le même impact sur le marché s'il s'agit d'une société internationale ou d'une petite entreprise. En somme, l'investisseur cherche donc à minimiser la fonctionnelle

$$J(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\eta_t |x'_t|^p + \gamma_t |x_t|^p\right) dt\right)$$

sur l'ensemble des processus progressivement mesurables x absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue tels que $x_0 = q_0$ et $x_T = 0$.

Définition 4.2.2.1. On définit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble de ces processus et

$$v = \inf_{x\in\mathcal{A}_0} J(x).$$

Lemme 4.2.2.2. Nous avons l'égalité suivante

$$\nu = \inf_{x\in\mathcal{A}_0} J(x) = \inf_{x\in\mathcal{D}_0} J(x),$$

avec $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des processus $x \in \mathcal{A}_0$ à trajectoires décroissantes.

Démonstration. On considère $x \in \mathcal{A}_0$ et

$$\underline{x}_t = \min_{0\le s\le t}(x_s) \vee 0.$$

Alors $\underline{x}$ est un processus progressivement mesurable à trajectoires décroissantes et absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue car, pour λ-presque tout $t \in [0, T]$,

$$\underline{x}'_t = x'_t \mathbb{1}_{\{x_t = \underline{x}_t\}}.$$

De plus, comme $q_0 \geq 0$ et $x_T = 0$,

$$\underline{x}_0 = x_0 = q_0, \quad \underline{x}_T = \underbrace{\min_{0\le s\le T}(x_s)}_{\le 0} \vee 0 = 0.$$

Ainsi

$$\underline{x} \in \mathcal{D}_0.$$

Nous avons également

$$\underline{x} \le x, \underline{x}' \le x'.$$

Donc
$$J(\underline{x}) \leq J(x).$$
Par conséquent, en utilisant également le fait que $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{A}_0$,
$$\inf_{x\in\mathcal{D}_0} J(x) \leq \inf_{x\in\mathcal{A}_0} J(x) \leq \inf_{x\in\mathcal{D}_0} J(x),$$
d'où le résultat souhaité. $\square$

Théorème 4.2.2.3. Avec les hypothèses du théorème, nous avons que le minimum de J est
$$v = Y_0|q_0|^p,$$
et la stratégie optimale minimisant J est donnée par
$$x_t^* = q_0 \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{Y_s}{\eta_s}\right)^{q-1} ds\right).$$

Démonstration. Procédons en deux étapes.
Etape 1 : Optimisation avec une condition finale $L \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère le couple (Y^L, Z^L) solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition finale L comme dans la démonstration précédente. Pour simplifier on suppose $q_0 = 1$. On note
$$\gamma_t^L = \gamma_t \wedge L, \quad g(z) = |z|^p,$$
$$x_t^L = \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{Y_s^L}{\eta_s}\right)^{q-1} ds\right),$$
$$M_t^L = pY_t^L(x_t^L)^{p-1} + p\int_0^t \gamma_s^L(x_s^L)^{p-1}dt.$$
Alors, par formule d'Itô, nous avons
$$dM_t^L = p(x_t^L)^{p-1}dY_t^L + p(p-1)Y_t^L(x_t^L)^{p-2}dx_t^L + p\gamma_t^L(x_t^L)^{p-1}dt,$$
avec
$$dY_t^L = \left((p-1)\eta_t^{-q+1}(Y_t^L)^q - \gamma_t^L\right)dt + \langle Z_t^L, dW_t\rangle$$
et
$$dx_t^L = -x_t^L\eta_t^{-q+1}(Y_t^L)^{q-1}dt.$$
Donc, après simplification,
$$dM_t^L = p(x_t^L)^{p-1}\langle Z_t^L, dW_t\rangle.$$
Or, par isométrie d'Itô et comme $x_t^L \leq 1$ et $Z^L \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}^2}(0,t)$,
$$\mathbb{E}(\langle M^L\rangle_t) = p^2\mathbb{E}\left(\int_0^t (x_t^L)^{2(p-1)}\left\|Z_t^L\right\|^2 dt\right) \leq p^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|Z_t^L\right\|^2 dt\right) < +\infty.$$
Ainsi M^L est une martingale de carré intégrable.
Soit $x \in \mathcal{A}$ i.e. $x : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ progressivement mesurable à trajectoires absolument continues et tel que $x_0 = \xi = 1$. On considère
$$\theta_t = x_t^L - x_t.$$
Alors $\theta_0 = 0$ et on peut supposer que x est à trajectoires décroissantes d'après le lemme précédent. Alors
$$|\theta_t| \leq |x_t^L| + |x_t| \leq 2.$$
De plus nous avons, comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i.e. $q = \frac{p}{p-1}$,
$$\eta_t g'(x_t^{L'}) = -p\eta_t|x_t^{L'}|^{p-1} = -p\eta_t|x_t^L\eta_t^{-q+1}(Y_t^L)^{q-1}|^{p-1} = -pY_t^L(x_t^L)^{p-1} = p\int_0^t \gamma_s^L(x_s^L)^{p-1}ds - M_t^L,$$

et la convexité de g implique

$$g(x_t^L) - g(x_t) \leq g'(x_t^L)(x_t^L - x_t) = g'(x_t^L)\theta_t,$$

et

$$g(x_t^{L'}) - g(x_t') \leq g'(x_t^{L'})(x_t^{L'} - x_t') = g'(x_T^{L'})\theta_t'.$$

Donc, par intégration par parties,

$$\int_0^T \eta_t(g(x_t^{L'}) - g(x_t'))dt \leq \int_0^T \eta_t g'(x_t^{L'})d(x_t^{L'} - x_t') = \int_0^T \left(p\int_0^t \gamma_s^L (x_s^L)^{p-1}ds - M_t^L\right) d\theta_t$$

$$= \left[\left(p\int_0^t \gamma_s^L (x_s^L)^{p-1}ds - M_t^L\right)\theta_t\right]_0^T - \int_0^T \theta_t\left(p\gamma_t^L(x_t^L)^{p-1}dt - dM_t^L\right)$$

$$= \underbrace{\left(p\int_0^T \gamma_s^L (x_s^L)^{p-1}ds - M_T^L\right)}_{=-pY_T^L(x_T^L)^{p-1}=-Y_T^L g'(x_T^L)}\theta_T - \int_0^T \theta_t \underbrace{p\gamma_t^L(x_t^L)^{p-1}}_{=\gamma_t^L g'(x_t^L)}dt + \int_0^T \theta_t dM_t^L,$$

i.e., comme $Y_T = L$,

$$\int_0^T \eta_t(g(x_t^{L'}) - g(x_t'))dt \leq -Lg'(x_T^L)\theta_T + \int_0^T \theta_t dM_t^L - \int_0^T \gamma_t^L g'(x_t^L)\theta_t dt.$$

Or M^L est une martingale de carré intégrable et θ est borné, donc $\int_0^{\cdot} \theta_t dM_t$ est une martingale issue de 0 donc d'espérance nulle. Par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \eta_t(g(x_t^{L'}) - g(x_t'))dt\right) \leq -\mathbb{E}\left(Lg'(x_T^L)\theta_T + \int_0^T \gamma_t^L g'(x_t^L)\theta_t dt\right)$$

$$\leq -\mathbb{E}\left(L(g(x_T^L) - g(x_T)) + \int_0^T \gamma_t^L(g(x_t^L) - g(x_t))dt\right).$$

Ainsi, en notant

$$J^L(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t|x_t'|^p + \gamma_t^L|x_t|^p)dt + L|x_T|^p\right),$$

nous obtenons

$$J^L(x^L) \leq J^L(x).$$

Par conséquent

$$v^L := \inf_{x\in\mathcal{A}} J^L(x) = J^L(x^L) = Y_0^L,$$

avec la dernière égalité étant justifiée par la formule d'Itô,

$$L(x_T^L)^p - Y_0^L = \int_0^T d(Y_t^L(x_t^L)^p) = \int_0^T (x_t^L)^p dY_t^L + \int_0^T Y_t^L d((x_t^L)^p)$$

$$= -\int_0^T \left(\frac{(Y_t^L)^q}{\eta_t^{q-1}}(x_t^L)^p + \gamma_t^L(x_t^L)^p\right)dt + \int_0^T (x_t^L)^p\langle Z_t^L, dW_t\rangle$$

et

$$(x_t^{L'})^p = \left(\left(\frac{Y_t^L}{\eta_t}\right)^{q-1} x_t^L\right)^p,$$

d'où

$$Y_0^L = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t(x_t^{L'})^p + \gamma_t^L(x_t^L)^p)dt + L(x_T^L)^p\right) = J^L(x^L).$$

Etape 2 : Cas avec contrainte sur x.
On considère

$$x_t = \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{Y_s}{\eta_s}\right)^{q-1} ds\right) \in \mathcal{A}, M_t = pY_t x_t^{p-1} + p\int_0^t \gamma_s x_s^{p-1} ds \geq 0.$$

Alors, comme précédemment par formule d'Itô,

$$dM_t = x_t^{p-1}\langle Z_t, dW_t\rangle.$$

Ainsi M est une martingale locale positive sur $[0,T[$ donc en particulier une sur-martingale. De plus, comme $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|Y_s|\right) < +\infty$, x est borné et $\gamma \in \mathcal{M}^2(0,t) \subset \mathcal{M}^1(0,t)$, M est bornée dans $L^1(\Omega)$. Par conséquent, par théorème de convergence sur les sur-martingales, il existe $M_{T-} \in L^1(\Omega)$ tel que

$$M_t \xrightarrow[t\to T]{PS} M_{T-}.$$

Puis, comme $Y_t \xrightarrow[t\to T]{PS} +\infty$ et d'après la définition de M_t,

$$0 \leq x_t = \left(\frac{M_t - p\int_0^t \gamma_s x_s^{p-1} ds}{pY_t}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(\frac{M_t}{pY_t}\right)^{\frac{1}{p-1}} \xrightarrow[t\to T]{PS} 0.$$

Donc $x_T = 0$ ce qui montre que $x \in \mathcal{A}_0$.
Puis, comme à l'étape précédente, par formule d'Itô, nous avons

$$Y_t x_t^p - Y_0 = \int_0^t d(Y_s x_s^p)ds = -\int_0^t (\eta_s (x_s')^p + \gamma_s x_s^p)ds + \int_0^s x_s^p \langle Z_s, dW_s\rangle.$$

Or $Z \in \mathcal{M}^2(0,t)$ et x est borné, donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t x_s^p\langle Z_s, dW_s\rangle\right) = 0.$$

Ainsi

$$Y_0 = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\eta_s(x_s')^p + \gamma_s x_s^p)ds\right) + \mathbb{E}(Y_t x_t^p) \geq \mathbb{E}\left(\int_0^t (\eta_s(x_s')^p + \gamma_s x_s^p)ds\right).$$

Par positivité nous pouvons appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir en faisant tendre t vers T

$$Y_0 \geq \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_s(x_s')^p + \gamma_s x_s^p)ds\right) = J(x).$$

Or, pour tout $\overline{x} \in \mathcal{A}_0$, nous avons $\overline{x}_T = 0$ et $\gamma_t^L \leq \gamma_t$ ce qui donne

$$J^L(\overline{x}) = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t|\overline{x}|_t'|^p + \gamma_t^L|\overline{x}_t|^p)dt + L|\overline{x}_T|^p\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t|\overline{x}_t'|^p + \gamma_t|\overline{x}_t|^p)dt\right) = J(\overline{x}).$$

Donc

$$v = \inf_{\overline{x}\in\mathcal{A}_0} J(x) \geq \inf_{\overline{x}\in\mathcal{A}_0} J^L(x) = v^L = Y_0^L.$$

D'où, en faisant tendre L vers $+\infty$,

$$v \geq Y_0.$$

Finalement, comme $x \in \mathcal{A}_0$,

$$Y_0 \leq v \leq J(x) \leq Y_0$$

ce qui montre le résultat souhaité. □

Remarque 4.2.2.4. Dans le cas d'une liquidation linéaire, nous avons

$$x_t = q_0 \frac{T-t}{T}, \quad x'_t = -\frac{q_0}{T}.$$

Ainsi

$$J(x) = \frac{q_0^p}{T^p} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t + (T-t)^p \gamma_t) dt\right).$$

Nous obtenons donc, grâce au théorème précédent, l'inégalité

$$Y_0 \leq \frac{1}{T^p} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t + (T-t)^p \gamma_t) dt\right).$$

Exemple 4.2.2.5. Si $T = 1, \eta_t = (1-t)^\beta$, avec $\beta \in [0, 1[$, $\gamma_t = 0$ et $p = q = 2$ alors l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition finale singulière se réécrie en

$$dY_t = \frac{Y_t^2}{(1-t)^\beta} dt + Z_t dW_t, \quad Y_1 = +\infty.$$

On cherche une solution déterministe de la forme $Y_t = c\,(1-t)^{\beta-1}$, $Z_t = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{dY_t}{dt} = -c(\beta-1)\,(1-t)^{\beta-2}, \frac{Y_t^2}{(1-t)^\beta} = c^2 (1-t)^{\beta-2}, Y_1 = +\infty.$$

Donc la solution est donnée par

$$Y_t = -(\beta-1)(1-t)^{\beta-1}, Z_t = 0.$$

Ainsi, d'après le corollaire précédent,

$$x_t^* = q_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{-(\beta-1)}{1-s} ds\right) = q_0 \exp\left((\beta-1)\int_0^t \frac{ds}{1-s}\right) = q_0 \exp\left(-(\beta-1)\left[\ln(1-s)\right]_0^t\right) = q_0 (1-t)^{-\beta+1},$$

et

$$v = -(\beta-1) q_0^2$$

Exemple 4.2.2.6. Si maintenant $\beta \in [1, +\infty[$ alors le raisonnement précédent ne s'applique plus. Cependant si $x_t = (1-t)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$J(x) = \int_0^1 \eta_t x_t'^2 dt = \alpha^2 \int_0^1 (1-t)^{2\alpha+\beta-2} dt = \frac{\alpha^2}{2\alpha+\beta-1} \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0$$

mais il n'existe pas de stratégie $x \in \mathcal{A}_0$ atteignant cette valeur.

4.2.3 Second exemple avec le calcul de Malliavin

Nous étudierons dans cette section un autre exemple d'équation différentielle stochastique rétrograde plus particulière. Nous nous concentrerons sur la démonstration du résultat faisant intervenir le calcul de Malliavin par le biais de la section 4.1.2. Les autres démonstrations se trouvent dans l'article [9]. Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$ et ξ une variable aléatoire quelconque. Alors on considère l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition finale singulière ξ

$$dY_t = Y_t |Y_t|^q dt + \langle Z_t, dW_t \rangle. \tag{9}$$

Nous avons alors comme précédemment le résultat d'existence d'une solution suivant.

Théorème 4.2.3.1. On suppose $\xi \overset{PS}{\geq} 0$. Alors il existe un couple de processus stochastiques progressivement mesurables (Y, Z) à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (9) avec condition finale singulière ξ. De plus

1. pour tout $t \in [0, T[$,

$$Y_t \leq (q(T-t))^{-\frac{1}{q}}, \quad \mathbb{E}\left(\int_0^t \|Z_r\|^2 dr\right) \leq (q(T-t))^{-\frac{2}{q}},$$

2. Y est à trajectoires continues sur $[0,T[$ et

$$Y_t \xrightarrow[t\to T]{PS} Y_{T-} \overset{PS}{\geq} \xi,$$

3. Z satisfait

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (T-r)^{\frac{2}{q}} \|Z_r\|^2 \, dt\right) \leq 8q^{-\frac{2}{q}}.$$

Nous pouvons alors nous demander si la propriété 2 du théorème précédent est une égalité i.e. si la solution Y est continue au temps $t = T$. Sans utiliser le calcul de Malliavin nous avons les résultats suivants.

Proposition 4.2.3.2. Sur l'ensemble $\{\xi = +\infty\}$, nous avons la convergence $\mathbb{P}$-preque sûre

$$(T-t)^{\frac{1}{q}} Y_t \xrightarrow[t\to T]{PS} q^{-\frac{1}{q}}.$$

On considère la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x, \tag{10}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times d}$ boréliennes vérifiant les hypothèses de lipschitziennité et de croissance : il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|, \|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|).$$

Définition 4.2.3.3. On définit l'hypothèse (H) suivante : il existe $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que

$$\xi = g(X_T),$$

avec $F_\infty := \{g = +\infty\}$ fermé et pour tout compact $C \subset \mathbb{R}^m \backslash F_\infty$,

$$g(X_T)\mathbb{1}_C(X_T) \in L^1(\Omega).$$

Théorème 4.2.3.4. On suppose l'hypothèse (H) et $q > 2$. Alors le processus Y est continu en T :

$$Y_t \xrightarrow[t\to T]{PS} \xi.$$

Puis, pour traiter le cas $q \leq 2$ nous allons avoir besoin d'hypothèses supplémentaires et d'utiliser le calcul de Malliavin avec la représentation $Z_t = D_t Y_t$.

Définition 4.2.3.5. On définit les hypothèses sur les paramètres b et σ :
— (B) il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t, x \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$,

$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K,$$

— (D) pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$,

$$\frac{\partial^2 \sigma^t \sigma}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^{m\times m}),$$

— (E) $\sigma^t\sigma$ est uniformément elliptique i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$${}^t y \sigma^t \sigma(t,x) y = \langle \sigma^t \sigma(t,x) y, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq \lambda \|y\|^2.$$

Définition 4.2.3.6. On définit l'hypothèse (H') suivante : (H) et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est continue et, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, g est lipschitzienne sur $O_M := \{|g| \leq M\}$.

Théorème 4.2.3.7. On suppose les hypothèses (B), (D), (E), (H') et $q \in]0, 2]$. Alors le processus Y est continu en T :

$$Y_t \xrightarrow[t\to T]{PS} \xi.$$

Démonstration. Procédons en plusieurs étapes.
Etape 1 : On suppose $\xi = h(X_T)$ avec h lipschizienne bornée.
Soit $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^m)$. Alors il existe $\psi :]0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que, pour tout $t \in]0,T]$,

$$\mathbb{E}(|Y_t\psi(t,X_t)|) < +\infty, \mathbb{E}\left(\langle Z_t, \nabla\varphi(X_t)\sigma(t,X_t)\rangle\right) = -\mathbb{E}(Y_t\psi(t,X_t)),$$

et ψ est donnée par la formule

$$\psi(t,x) = \sum_{i=1}^{d}(\nabla\varphi\sigma)_i(x)\frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(t,x)}{p(t,x)} + \operatorname{tr}(H_\varphi(x)\sigma^t\sigma(t,x)) + \sum_{i=1}^{d}\langle\nabla\varphi(x), ((\nabla\sigma_i)\sigma_i)\rangle(t,x),$$

avec $p(,\cdot)$ la densité de X_t.
En effet, d'après le théorème 3.2.2.2,

$$X_T \in \mathbb{D}^{1,\infty}, \quad \sup_{0\le r\le t}\mathbb{E}\left(\sup_{r\le s\le T}\left\|D_r^jX_s\right\|^p\right) < +\infty.$$

En particulier, en utilisant la règle de la chaîne et le caractère borné de h,

$$\int_0^T \mathbb{E}(\|D_\theta\xi\|^2)d\theta < +\infty$$

Puis, comme h est lipschitzienne, d'après la remarque 1.2.1.24,

$$\xi = h(X_T) \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Notons M une borne de la fonction h. Alors Y est également bornée par M. Ainsi le générateur de l'équation différentielle stochastique rétrograde est une fonction déterministe $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $y \in [0,M]$,

$$f(y) = y^{q+1}.$$

Toutes les hypothèses du théorème 4.1.2.4 sont donc vérifiées et on obtient

$$Z_s^i = D_s^iY_s = \lim_{r\to s-}D_r^iY_s.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\langle Z_t, \nabla\varphi(X_t)\sigma(t,X_t)\rangle) = \mathbb{E}(\langle D_tY_t, \nabla\varphi\sigma(t,X_t)\rangle) = \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}(D_t^iY_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)).$$

On considère, pour $i \in [\![1,d]\!], j \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0,T]$,

$$v_j^i(r) = j\mathbb{1}_{\left[t-\frac{1}{j},t\right]}(r)e_i,$$

et

$$D^{v_j^i}Y_t = \langle DY_t, v_j^i\rangle_{L^2([0,T],\mathbb{R}^d)}.$$

Alors, par intégration par parties avec $F = Y_t$, $G = (\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)$ et $h = v_j^i$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(D^{v_j^i}Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)\right) &= \mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)W(v_j^i)\right) - \mathbb{E}\left(Y_t\langle D((\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)), v_j^i\rangle_{L^2([0,T],\mathbb{R}^d)}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)\int_0^T v_j^i(r)dW_r\right) - \mathbb{E}\left(Y_tD^{v_j^i}((\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t))\right),\end{aligned}$$

avec, par définition de v_j^i,

$$\mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)\int_0^T v_j^i(r)dW_r\right) = j\mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)\left(W_t^i - W_{t-\frac{1}{j}}^i\right)\right).$$

Ainsi, en utilisant l'article [8],

$$\mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)\int_0^T v_j^i(r)dW_r\right) = -\mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)j\int_{t-\frac{1}{j}}^t\frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(u,X_u)}{p(u,X_u)}du\right).$$

On obtient finalement en faisant tendre j vers $+\infty$ et en utilisant des arguments d'équations aux dérivées partielles (grâce aux hypothèses sur b et σ),

$$\mathbb{E}(D_t^i Y_t (\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)) = -\mathbb{E}\left(Y_t(\nabla\varphi\sigma)_i(X_t)\frac{\mathrm{div}(p\sigma_i)(t,X_t)}{p(t,X_t)}\right) - \mathbb{E}\left(Y_t D_t^i((\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t))\right),$$

avec, d'après la règle de la chaîne et l'équation différentielle stochastique (10) vérifiée par X,

$$\begin{aligned} D_t^i((\nabla\varphi\sigma)_i(t,X_t)) &= \nabla(\nabla\varphi\sigma)_i(X_t)D_t^i X_t = \nabla(\nabla\varphi\sigma)_i(X_t)\sigma_i(t,X_t) \\ &= ({}^t\sigma H_\varphi \sigma)_{ii}(t,X_t) + \langle\nabla\varphi, (\nabla\sigma_i)\sigma_i\rangle(t,X_t). \end{aligned}$$

Finalement on obtient bien l'expression

$$\mathbb{E}\left(\langle Z_t, \nabla\varphi(X_t)\sigma(t,X_t)\rangle\right) = -\mathbb{E}(Y_t\psi(t,X_t)).$$

Etape 2 ; Appliquer ce résultat à (Y^n, Z^n, φ).
On considère (Y^n, Z^n) solution de la même équation différentielle stochastique rétrograde (9) mais avec comme condition finale

$$Y_T^n = (g\wedge n)(X_T).$$

Or $g\wedge n$ est bornée (par n) et K_{n+1}-lipschitzienne si l'on note

$$K_n := \sup\{\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}, g(x)\vee g(y)\leq n\}.$$

En effet, par l'hypothèse (H'), $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs, et de plus, pour tout $x, y\in\mathbb{R}^m$,

— si $g(x)\vee g(y)\leq n$ alors

$$|(g\wedge n)(x)-(g\wedge n)(y)| = |g(x)-g(y)| \leq K_n|x-y| \leq K_{n+1}|x-y|,$$

— si $g(x)\wedge g(y)\geq n$ alors

$$|(g\wedge n)(x)-(g\wedge n)(y)| = 0 \leq K_{n+1}|x-y|,$$

— si $g(y) < n \leq g(x)$ alors

$$|(g\wedge n)(x)-(g\wedge n)(y)| = n-g(y) \leq K_{n+1}d(y,\{z\in\mathbb{R}^m, g(z)\geq n\}) \leq K_{n+1}|y-x|,$$

car, pour $z\in\mathbb{R}^m$ tel que $n\leq g(z)\leq n+1$ (existe par continuité de g),

$$n-g(y)\leq g(z)-g(y) = \frac{g(z)-g(y)}{|z-y|}|z-y| \leq K_{n+1}|z-y|,$$

d'où le résultat en passant à la borne inférieure sur z.

On peut donc appliquer ce qui précède avec (Y^n, Z^n) et φ pour obtenir

$$\mathbb{E}\left(\langle Z_t^n, \nabla\varphi(X_t)\sigma(t,X_t)\rangle\right) = -\mathbb{E}(Y_t^n\psi(t,X_t)).$$

Or, d'après la formule d'Itô appliquée à $Y_t^n\varphi(X_t)$, nous avons

$$Y_T^n\varphi(X_T) = Y_t^n\varphi(X_t) + \int_t^T \varphi(X_r)(Y_r^n(Y_r^n)^q dr + \langle Z_r^n, dW_r\rangle) + \int_t^T Y_t^n d(\varphi(X_r)) + \int_t^T \langle Z_r^n, \nabla\varphi(X_r)\sigma(r,X_r)\rangle dr,$$

avec, grâce à la formule d'Itô, l'équation différentielle stochastique (10) vérifiée par X et la définition de $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} d(\varphi(X_r)) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_r)dX_r^i + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(X_r)d\langle X^i, X^j\rangle_r \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_r)(b_i(r,X_r)dr + \langle\sigma_i(r,X_r), dW_r^i\rangle) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(X_r)\sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(r,X_r)\sigma_{jk}(r,X_r)dr, \end{aligned}$$

i.e.
$$d(\varphi(X_r)) = \langle \nabla\varphi(X_r), b(r,X_r)\rangle dr + \langle \nabla\varphi(X_r)\sigma(r,X_r), dW_r\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(H_\varphi(X_r)\sigma^t\sigma(r,X_r))dr$$
$$= \mathcal{L}(\varphi)(X_r)dr + \langle \nabla\varphi(X_r)\sigma(r,X_r), dW_r\rangle,$$
d'où l'expression
$$Y_T^n\varphi(X_T) = Y_t^n\varphi(X_t) + \int_t^T \langle Z_r^n, \nabla\varphi(X_r)\sigma(t,X_t)\rangle dr + \int_t^T \varphi(X_r)(Y_r^n)^{1+q}dr + \int_t^T Y_r^n\mathcal{L}(\varphi)(X_r)dr$$
$$+ \int_t^T \varphi(X_r)\langle Z_r^n, dW_r\rangle + \int_t^T \langle \nabla\varphi(X_r)\sigma(r,X_r), dW_r\rangle.$$
Ainsi, en appliquant l'espérance et en utilisant le fait que l'intégrale stochastique est une martingale issue de 0, il ne reste plus que
$$\mathbb{E}(Y_T^n\varphi(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t^n\varphi(X_t)) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \langle Z_r^n, \nabla\varphi(X_r)\sigma(t,X_t)\rangle dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \varphi(X_r)(Y_r^n)^{1+q}dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\mathcal{L}(\varphi)(X_r)dr\right).$$
Donc, en utilisant le théorème de Fubini et ce qui précède,
$$\mathbb{E}(Y_T^n\varphi(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t^n\varphi(X_t)) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\psi(r,X_r)dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \varphi(X_r)(Y_r^n)^{1+q}dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\mathcal{L}(\varphi)(X_r)dr\right),$$
avec, par définition de $\mathcal{L}$,
$$\mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\mathcal{L}(\varphi)(X_r)dr\right) = \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\langle \nabla\varphi(X_r), b(r,X_r)\rangle dr\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\mathrm{tr}(H_\varphi(X_r)\sigma^t\sigma(r,X_r))dr\right).$$
Etape 3 : Continuité de Y en T.
D'après l'hypothèse (H), $F_\infty = \{g = +\infty\}$ est fermé, donc $F_\infty^c = \{g < +\infty\}$ est ouvert, il existe donc un ouvert borné U de $\mathbb{R}^m$ tel que
$$\overline{U} \subset F_\infty^c = \{g < +\infty\}.$$
On considère $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+)$ tel que
$$\phi_{|\mathbb{R}^m\setminus U} = 0, \quad \phi_{|U} > 0.$$
On considère également $\alpha \in \left]2\left(1+\frac{1}{q}\right), +\infty\right[$. Alors, en appliquant ce qui précède avec $\varphi = \phi^\alpha$,
$$\mathbb{E}(Y_T^n\phi^\alpha(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t^n\phi^\alpha(X_t)) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q}dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\psi_\alpha(r,X_r)dr\right),$$
avec
$$\psi_\alpha(t,x) = \langle \nabla(\phi^\alpha)(x), b(t,x)\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(H_{\phi^\alpha}(x)\sigma^t\sigma(t,x)\right)$$
$$-\sum_{i=1}^d \left((\nabla(\phi^\alpha)(x)\sigma(t,x))_i \frac{\mathrm{div}(p(t,x)\sigma_i(t,x))}{p(t,x)}\right) - \sum_{i=1}^d \langle \nabla(\phi^\alpha)(x), (\nabla\sigma_i(t,x)\sigma_i(t,x))\rangle.$$
Soit $\varepsilon \in]0,T]$ et $p = 1+\frac{1}{q}$.
Or, pour les deux premiers termes, d'après les hypothèses (B) et (H),
$$\phi^{-\alpha(p-1)}|\langle \nabla(\phi^\alpha), b(t,\cdot)\rangle|^p, \quad \frac{1}{2}\phi^{-\alpha(p-1)}\left|\mathrm{tr}\left(H_{\phi^\alpha}\sigma^t\sigma(t,\cdot)\right)\right|^p \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^m).$$
De plus $\alpha > 2\left(1+\frac{1}{q}\right) = 2p$, donc, pour le dernier terme, en utilisant les hypothèses sur σ et le fait que φ est C^2 à support compact,
$$\phi^{-\alpha(p-1)}\left|\sum_{i=1}^d \langle \nabla(\phi^\alpha), \nabla\sigma_i(t,\cdot)\sigma_i(t,\cdot)\rangle\right|^p \leq C_p\sum_{i=1}^d \phi^{-\alpha(p-1)}|\langle \nabla(\varphi^\alpha), \nabla\sigma_i(t,\cdot)\sigma_i(t,\cdot)\rangle|^p$$

$$\leq C_p \sum_{i=1}^{d} \phi^{-\alpha(p-1)} \left\|\nabla(\varphi^\alpha)\right\|^p \left\|\nabla\sigma_i(t,\cdot)\sigma_i(t,\cdot)\right\|^p \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^m).$$

Enfin, pour le troisième terme,

$$\phi^{-\alpha(p-1)} \left|\sum_{i=1}^{p} (\nabla(\phi^\alpha)\sigma(t,\cdot))_i \frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(t,\cdot)}{p(t,\cdot)}\right|^p = \alpha^p \phi^{\alpha-p} \left|\sum_{i=1}^{p} (\nabla\phi\sigma(t,\cdot))_i \frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(t,\cdot)}{p(t,\cdot)}\right|^p$$

$$= \alpha^p \phi^{\alpha-p} \left|\sum_{i=1}^{p} (\nabla\phi\sigma(t,\cdot))_i \left(\operatorname{div}(\sigma_i)(t,\cdot) + \frac{1}{p(t,\cdot)}\langle\sigma_i(t,\cdot), \nabla p(t,\cdot)\rangle\right)\right|^p.$$

Ainsi, par convexité,

$$\phi^{-\alpha(p-1)} \left|\sum_{i=1}^{p} (\nabla(\phi^\alpha)\sigma(t,\cdot))_i \frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(t,\cdot)}{p(t,\cdot)}\right|^p$$

$$\leq \alpha^p (2d)^{p-1} \sum_{i=1}^{d} \phi^{\alpha-p} |(\nabla\phi\sigma(t,\cdot))_i \operatorname{div}(\sigma_i)(t,\cdot)|^p + \alpha^p (2d)^{p-1} \sum_{i=1}^{d} \phi^{\alpha-p} |(\nabla\phi\sigma(t,\cdot))_i \sigma_i(t,\cdot)|^p \frac{|\nabla p(t,\cdot)|^p}{|p(t,\cdot)|^p}.$$

Le premier terme appartient à $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ car $\alpha - p > 0$, ϕ continue à support compact et d'après les hypothèses sur σ (lipschitziennité et (B)).
Pour le second terme la densité p vérifie d'après l'article d'Aronson [2]

$$\frac{\exp\left(-C\frac{|y-x|}{s}\right)}{Cs^{\frac{m}{2}}} \leq p(s,y) \leq \frac{C\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{Cs}\right)}{s^{\frac{m}{2}}},$$

et $\phi^{\alpha-p}$ est à support compact $\mathcal{K}$, donc le minimum de p existe sur $[\varepsilon,T]\times\mathcal{K}$ et est positif, ainsi le numérateur est contrôlé, de plus pour le dénominateur $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ satisfait une condition de Hölder en x d'après les résultats sur les équations aux dérivées partielles. Par conséquent

$$\phi^{-\alpha(p-1)} \left|\sum_{i=1}^{p} (\nabla(\phi^\alpha)\sigma(t,\cdot))_i \frac{\operatorname{div}(p\sigma_i)(t,\cdot)}{p(t,\cdot)}\right|^p \in L^\infty([\varepsilon,T]\times\mathbb{R}^m).$$

Finalement nous avons bien, d'après l'expression de ψ_α,

$$\phi^{-\alpha(p-1)}|\psi_\alpha|^p \in L^\infty([\varepsilon,T]\times\mathbb{R}^m).$$

Ainsi, pour tout $t \in [\varepsilon, T]$,

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_r^n \psi_\alpha(r,X_r)| dr\right) = \mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_r^n \phi^{\alpha(p-1)}(X_r)||\phi^{-\alpha(p-1)}\psi_\alpha(r,X_r)| dr\right)$$

$$\leq \left\|\phi^{-\alpha(p-1)}|\psi_\alpha|^p\right\|_\infty \mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_r^n \phi^{\alpha(p-1)}(X_r)| dr\right).$$

Donc, par inégalité de Hölder avec $1+q$ et $\frac{1}{1-\frac{1}{1+q}} = \frac{1+q}{q}$,

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_r^n \psi_\alpha(r,X_r)| dr\right) \leq \left\|\phi^{-\alpha(p-1)}|\psi_\alpha|^p\right\|_\infty (T-t)^{\frac{q}{1+q}} \left(\mathbb{E}\left(\int_t^T |(Y_r^n)^{1+q} \phi^{\alpha(p-1)(1+q)}(X_r)| dr\right)\right)^{\frac{1}{1+q}},$$

avec

$$(p-1)(1+q) = \frac{1+q}{q} = 1 + \frac{1}{q}.$$

Donc, comme ϕ est bornée, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_r^n \psi_\alpha(r,X_r)| dr\right) \leq C\left(\mathbb{E}\left(\int_t^T |(Y_r^n)^{1+q} \phi^\alpha(X_r)| dr\right)\right)^{\frac{1}{1+q}}.$$

De même il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [\varepsilon, T]$,

$$\mathbb{E}(|Y_t^n \psi_\alpha(t, X_t)|) \leq C \left(\mathbb{E}(|(Y_t^n)^{1+q} \phi^\alpha(X_t)|)\right)^{\frac{1}{1+q}}.$$

Utilisons à présent la relation

$$\mathbb{E}(Y_T^n \phi^\alpha(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t^n \phi^\alpha(X_t)) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q} dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r) dr\right).$$

En particulier

$$\mathbb{E}(Y_T^n \phi^\alpha(X_T)) - \mathbb{E}(Y_\varepsilon^n \phi^\alpha(X_\varepsilon)) = \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q} dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r) dr\right).$$

Or

$$Y_T^n \phi^\alpha(X_T) \leq g(X_T)\phi^\alpha(X_T)$$

et, comme ϕ est à support dans $\{g < +\infty\}$ et d'après l'hypothèse (H),

$$\mathbb{E}(g(X_T)\phi^\alpha(X_T)) = \mathbb{E}(g(X_T)\phi^\alpha(X_T)\mathbb{1}_{\overline{U}}(X_T)) \leq \|\phi\|_\infty^\alpha \, \mathbb{E}(g(X_T)\mathbb{1}_{\overline{U}}(X_T)) < +\infty.$$

De plus Y_ε^n vérifie

$$0 \leq Y_\varepsilon^n \leq (q(T-\varepsilon))^{-\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$0 \leq \mathbb{E}(Y_\varepsilon^n \phi^\alpha(X_\varepsilon)) \leq \|\phi\|_\infty^\alpha \, (q(T-\varepsilon))^{-\frac{1}{q}}.$$

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ indépendant de n tel que

$$\mathbb{E}(Y_T^n \phi^\alpha(X_T)) - \mathbb{E}(Y_\varepsilon^n \phi^\alpha(X_\varepsilon)) \leq C.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T |Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r)| dr\right) \leq C \left(\mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T (Y_r^n)^{1+q} \phi^\alpha(X_r) dr\right)\right)^{\frac{1}{1+q}}.$$

Donc, en utilisant cette inégalité dans l'inégalité suivante,

$$\mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q} dr\right) = \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q} dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r) dr\right) - \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r) dr\right)$$

$$= \mathbb{E}(Y_T^n \phi^\alpha(X_T) - \mathbb{E}(Y_\varepsilon^n \phi^\alpha(X_\varepsilon)) - \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T Y_r^n \psi_\alpha(r, X_r) dr\right) \leq C + \mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T Y_r^n |\psi_\alpha(r, X_r)| dr\right)$$

nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T \phi^\alpha(X_r)(Y_r^n)^{1+q} dr\right) - C\left(\mathbb{E}\left(\int_\varepsilon^T \phi^\alpha(X_t)(Y_t^n)^{1+q} dt\right)\right)^{\frac{1}{1+q}} \leq C.$$

Or $\{x \in \mathbb{R}_+, x - Cx^{\frac{1}{1+q}} \leq C\}$ est borné car

$$x - Cx^{\frac{1}{1+q}} \underset{x \to +\infty}{\sim} x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty > C.$$

Donc $\phi^\alpha(X)(Y^n)^{1+q}$ est une suite bornée dans $L^1(\Omega \times [\varepsilon, T])$. De plus il s'agit d'une suite croissante vers $\phi^\alpha(X)Y^{1+q}$, donc, d'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\phi^\alpha(X)Y^{1+q} \in L^1(\Omega \times [\varepsilon, T]).$$

Par conséquent, comme Y est borné sur $[0, \varepsilon]$ par $(q(T-\varepsilon))^{-\frac{1}{q}}$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T Y_r^{1+q} \phi^\alpha(X_r) dr\right) < +\infty.$$

Pour terminer on considère $\theta \in C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ à support compact inclus strictement dans $F_\infty^c = \{g < +\infty\}$. Il existe ϕ comme précédemment telle que

$$|\theta| \leq C\phi^\alpha, \|\nabla\theta\| \leq C\phi^{\alpha-1}, \|H_\theta\| \leq C\phi^{\alpha-2}.$$

Alors, pour $t \in [\varepsilon, T]$,

$$\mathbb{E}((\xi \wedge n)\theta(X_T)) = \mathbb{E}(Y_T^n\theta(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t^n\theta(X_t)) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \theta(X_r)(Y_r^n)^{1+q}dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r^n\Theta(r, X_r)dr\right),$$

avec

$$\Theta(t,x) = \langle\nabla\theta(x), b(t,x)\rangle - \sum_{i=1}^d \left((\nabla\theta(x)\sigma(t,x))_i \frac{\operatorname{div}(p(t,x)\sigma_i(t,x))}{p(t,x)}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(H_\theta(x)\sigma^\sigma(t,x)) - \sum_{i=1}^d \langle\nabla\theta(x), \nabla\sigma_i(t,x)\sigma_i(t,x)\rangle.$$

Ainsi, par en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient grâce au théorème de convergence dominée justifié par les inégalités précédentes indépendantes de n,

$$\mathbb{E}(\xi\theta(X_T)) = \mathbb{E}(Y_T\theta(X_T)) = \mathbb{E}(Y_t\theta(X_t)) + \mathbb{E}\left(\int_t^T \theta(X_r)Y_r^{1+q}dr\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_r\Theta(r, X_r)dr\right).$$

Puis, en faisant tendre t vers T, on obtient également

$$\mathbb{E}(\xi\theta(X_T)) = \lim_{t\to T}\mathbb{E}(Y_t\theta(X_t)) + 0.$$

Ainsi, par lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}(\xi\theta(X_T)) = \liminf_{t\to T}(\mathbb{E}(Y_t\theta(X_t))) \geq \mathbb{E}\left(\liminf_{t\to T}(Y_t)\theta(X_T)\right).$$

Or, d'après le théorème 4.2.3.1, nous avons déjà

$$\lim_{t\to T}(Y_t) \overset{PS}{\geq} g(X_T) = \xi.$$

Donc l'inégalité précédente est une égalité

$$\mathbb{E}(\xi\theta(X_T)) = \mathbb{E}\left(\lim_{t\to T}(Y_t)\theta(X_T)\right).$$

D'où, $\mathbb{P}$-presque sûrement sur $\{g < +\infty\}$,

$$\lim_{t\to+\infty}(Y_t) = \xi,$$

ce qui montre bien la continuité de Y en T. $\square$

4.2.4 Adaptation de l'utilisation précédente

On se demande dans cette section si l'on peut comme à la section 5.2 quelle fonctionnelle va être minimiser si on change l'équation différentielle stochastique rétrograde de la section 5.1 en celle de la section 5.3. Dans la section 5.2, la fonctionnelle à minimiser était

$$J(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\eta_t|x_t'|^p + \gamma_t|x_t|^p)dt\right)$$

avec comme minimiseur

$$x_t^* = \xi\exp\left(-\int_0^t \left(\frac{Y_s}{\eta_s}\right)^{q-1} ds\right),$$

où $\xi = x_0$ et Y est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition terminale singulière $Y_T = +\infty$

$$dY_t = \left((p-1)\frac{Y_t^q}{\eta_t^{q-1}} - \gamma_t\right)dt + \langle Z_t, dW_t\rangle.$$

Proposition 4.2.4.1. La fonctionnelle

$$J(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T |x'_t|^p dt\right)$$

est minimisée par

$$x_t = \xi \exp\left(-\frac{1}{p-1}\int_0^t Y_s^q ds\right),$$

avec Y solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec condition terminale singulière de la section 5.3

$$dY_t = Y_t^{q+1} dt + \langle Z_t, dW_t \rangle.$$

Démonstration. Pour transposer le problème des sections 5.1 et 5.2 à la section 5.3, on passe de q à $q+1$ et on suppose

$$\gamma_t = 0,$$

et

$$\eta_t = (p-1)^{-\frac{1}{q}}.$$

La fonctionnelle à minimiser est donc

$$J(x) = (p-1)^{-\frac{1}{q}} \mathbb{E}\left(\int_0^T |x'_t|^p dt\right),$$

i.e., comme $(p-1)^{-\frac{1}{q}} \geq 0$,

$$J(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T |x'_t|^p dt\right),$$

Les processus γ et η étant déterministes et constants, ils vérifient directement les hypothèses de la section 5.1. Ainsi cette fonctionnelle est minimisée par

$$x_t = \xi \exp\left(-\frac{1}{p-1}\int_0^t Y_s^q ds\right).$$

□

Références

[1] S. Ankirchner, M. Jeanblanc, and T. Kruse. BSDEs with Singular Terminal Condition and a Control Problem with Constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 52(2) :893–913, 2014.

[2] D. G. Aronson. Non-negative solutions of linear parabolic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 22 :607–694, 1968.

[3] Bruno Bouchard. Lecture notes on BSDEs Main existence and stability results. Lecture, February 2015.

[4] N. El Karoui, S.G. Peng, and M.C. Quenez. Backward stochastic differential equations in finance. *Math. Finance*, 7(1) :1–71, 1997.

[5] Olivier Guéant. *The financial mathematics of market liquidity.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016. From optimal execution to market making.

[6] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[7] David Nualart and Eulalia Nualart. *Introduction to Malliavin calculus*, volume 9 of *Institute of Mathematical Statistics Textbooks.* Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[8] É. Pardoux. Grossissement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 48–55. Springer, Berlin, 1986.

[9] A. Popier. Backward stochastic differential equations with singular terminal condition. *Stochastic Process. Appl.*, 116(12) :2014–2056, 2006.

[10] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equation.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, second edition, 1992.