Résolution de l'équation des ondes dans $S(\mathbb{R})$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet

Leçons.

1. 222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires
2. 250 Transformation de Fourier, exemples et applications

Théorème. Soit $u_0, v_0 \in S(\mathbb{R})$ tel que $x \longmapsto \int_0^x v_0(s)ds \in S(\mathbb{R})$, alors la fonction

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{2}(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds \end{array}$$

est solution de l'équation des ondes unidimensionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{array} \right.$$

et est l'unique telle que $\forall t \in \mathbb{R}, u(\cdot,t) \in S(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système aux dérivées partielles précédent.
On suppose de plus que $\forall t \in \mathbb{R}, u(\cdot,t) \in S(\mathbb{R})$.
<u>Etape 1 : Se ramener à une équation différentielle linéaire par transformation de Fourier</u>
On peut appliquer la transformation de Fourier par rapport à la variable d'espace à la première équation pour obtenir par linéarite de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - c^2\mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0$$

Par propriété de la transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R})$ (obtenue par deux théorèmes d'intégration par parties), on obtient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\xi) = -\xi^2\mathcal{F}(u)(\xi)$$

De plus par théorème de dérivation sous le signe intégral, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(\xi) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial t^2}(\xi)$$

Donc finalement

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial t^2}(\xi) + c^2\xi^2\mathcal{F}(u)(\xi) = 0$$

Ainsi, pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(u)(\xi)$ vérifie par rapport à la variable de temps l'équation linéaire homogène du second degré

$$y'' + c^2\xi^2 y = 0$$

de polynôme caractéristique $X^2 + c^2\xi^2$ de racines $ic\xi$ et $-ic\xi$.
Donc il existe $C_1(\xi), C_2(\xi) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(u)(\xi, t) = C_1(\xi)e^{ic\xi t} + C_2(\xi)e^{-ic\xi t}$$

Etape 2 : Détermination des constantes par les conditions de Cauchy
Or $\forall x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = u_0(x)$, donc

$$\mathcal{F}(u)(\xi, 0) = \mathcal{F}(u_0)(\xi)$$

D'où

$$\mathcal{F}(u_0)(\xi) = C_1(\xi)e^{ic\xi 0} + C_2(\xi)e^{-ic\xi 0} = C_1(\xi) + C_2(\xi)$$

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

Donc, par théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial t}(\xi, 0) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0)\right)(\xi) = \mathcal{F}(v_0)(\xi)$$

D'où

$$\mathcal{F}(v_0)(\xi) = ic\xi C_1(\xi)e^{ic\xi 0} - ic\xi C_2(\xi)e^{-ic\xi 0} = ic\xi(C_1(\xi) - C_2(\xi))$$

On cherche donc à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1(\xi) + C_2(\xi) & = & \mathcal{F}(u_0)(\xi) \\ ic\xi(C_1(\xi) - C_2(\xi)) & = & \mathcal{F}(v_0)(\xi) \end{array}\right.$$

Ce qui donne pour $\xi \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1(\xi) & = & \frac{1}{2}\mathcal{F}(u_0)(\xi) + \frac{1}{2ic\xi}\mathcal{F}(v_0)(\xi) \\ C_2(\xi) & = & \frac{1}{2}\mathcal{F}(u_0)(\xi) - \frac{1}{2ic\xi}\mathcal{F}(v_0)(\xi) \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(u)(\xi, t) & = & \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(u_0)(\xi) + \frac{1}{2ic\xi}\mathcal{F}(v_0)(\xi)\right)e^{ic\xi t} + \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(u_0)(\xi) - \frac{1}{2ic\xi}\mathcal{F}(v_0)(\xi)\right)e^{-ic\xi t} \\ & = & \frac{1}{2}\mathcal{F}(u_0)(\xi)(e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) + \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{2ic\xi}(e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}) \\ & = & \mathcal{F}(u_0)(\xi)cos(c\xi t) + \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{c\xi}sin(c\xi t) \end{array}$$

On remarque que cette fonction est prolongeable en 0 de façon C^∞ car, par exemple $\frac{sin(x)}{x} = \int_0^1 cos(xy)dy$ ou par développement limité. Il n'est donc plus nécessaire de considérer $\xi \neq 0$.
Ainsi

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{F}(u)(\xi, t) = \mathcal{F}(u_0)(\xi) cos(c\xi t) + \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{c\xi} sin(c\xi t)$$

Etape 3 : Se ramener à u par inversion de Fourier
Pour $t \in \mathbb{R}$, par inversion de Fourier dans $S(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, u(x,t) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(\xi, t) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{2} \mathcal{F}(u_0)(\xi)(e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) + \tfrac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{2ic\xi} (e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}) \right) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{2} \mathcal{F}(u_0)(\xi)(e^{i\xi(ct+x)} + e^{i\xi(-ct+x)}) + \tfrac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{2ic\xi} (e^{i\xi(ct+x)} - e^{i\xi(-ct+x)}) \right) d\xi
\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégration et inversion de Fourier appliquée à u_0

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(ct+x) + u_0(-ct+x)) + \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{i\xi} e^{i\xi(ct+x)} d\xi - \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{i\xi} e^{i\xi(-ct+x)} d\xi$$

Or $x \longmapsto \int_0^x v_0(x)dx \in S(\mathbb{R})$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(v_0)(\xi) = i\xi \mathcal{F}\left(\int_0^x v_0(s) ds \right)(\xi)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{i\xi} e^{i\xi(ct+x)} d\xi = \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left(\int_0^x v_0(s) ds \right)(\xi) e^{i\xi(ct+x)} d\xi$$

Puis, par inversion de Fourier appliqué à $x \longmapsto \int_0^x v_0(s)ds$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{i\xi} e^{i\xi(ct+x)} d\xi = \frac{1}{2c} \int_0^{ct+x} v_0(s) ds$$

De même

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4c\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(v_0)(\xi)}{i\xi} e^{i\xi(-ct+x)} d\xi = \frac{1}{2c} \int_0^{-ct+x} v_0(s) ds$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(ct+x) + u_0(-ct+x)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct+x}^{ct+x} v_0(s) ds$$

Etape 4 : Vérification
On vérifie que u définie ainsi vérifie l'équation des ondes (après des calculs laborieux). $\square$

Remarque. On peut supposer seulement $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ pour que la définition de u ait du sens et vérifie l'équation des ondes.