Exercice.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Montrer que, sous certaine(s) condition(s) à préciser, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Etudier la convergence de la série

$$\sum \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}.$$

Exercice. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1,n]\!]$ et A_p l'événement $\{p \mid X\}$.

1. On suppose dans cette question que p divise n. Déterminer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. On considère $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants, i.e. pour tout $i_1, ..., i_r \in [\![1, ..., k]\!]$,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que

$$\phi(n) = n\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Exercice. On considère le plan P et la droite D de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définis par

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}, D = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D.$$
2. On considère p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D, et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le vecteur $p(u)$ en fonction de x, y, z et la matrice de l'endomorphisme p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme p est diagonale.

Exercice. On considère E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Exercice. Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note les événements

$$\begin{aligned} A_n &= \text{"l'animal est en } A \text{ après son } n\text{-ième trajet"}, \\ B_n &= \text{"l'animal est en } B \text{ après son } n\text{-ième trajet"}, \\ C_n &= \text{"l'animal est en } C \text{ après son } n\text{-ième trajet"}. \end{aligned}$$

On considère également

$$\mathbb{P}(A_n) = a_n, \mathbb{P}(B_n) = b_n, \mathbb{P}(C_n) = c_n$$

.

1. Déterminer la relation entre a_{n+1} et a_n, b_n, c_n. Faire de même avec entre b_{n+1} et a_n, b_n, c_n, et entre c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.
2. On considère la matrice A définie par
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Montrer que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de la matrice A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que
$$A = PDP^{-1}.$$
3. Sans finaliser les calculs, en déduire une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Exercice. On considère E un espace préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme de E symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.