Exercice. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\varphi_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

1. Montrer que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\varphi_k(n) = \binom{n}{k}.$$

2. On considère, pour $n \in [\![0,N]\!]$, $j \in [\![0,N]\!]$ et $u \in \mathbb{R}$,

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(N-X), \quad f_j(u) = \sum_{n=0}^{N}P_n(j)u^n.$$

   Montrer que

$$f_j(u) = (1-u)^j(1+u)^{N-j}.$$

3. On considère, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}f_j(u)f_j(v).$$

   Montrer que

$$F(u,v) = 2^N(1+uv)^N.$$

4. Soit $(a,b) \in [\![0,N]\!]^2$. Montrer que

$$\frac{\partial^{a+b}F}{\partial u^a\partial v^b}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq b \\ 2^N\dfrac{N!a!}{(N-a)!} & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

5. En déduire que $(P_k)_{0\leq k\leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus N, pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}P(j)Q(j), \quad (P,Q) \in (\mathbb{R}_N[X])^2.$$

Corrigé.

1. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\varphi_k(n) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i).$$

   Donc, si $k > n$ alors il existe $i \in [\![0,k-1]\!]$ tel que $n = i$, d'où

$$\varphi_k(n) = 0.$$

Réciproquement si $k \leq n$ alors

$$\varphi_k(n) = \frac{1}{k!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(n-i)}{\prod_{i=k}^{n-1}(n-i)} = \frac{n!}{k! \prod_{j=1}^{n-k} j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

On a donc bien dans les deux cas $\varphi_k(n) = \binom{n}{k}$.

2. Nous avons, d'après la question précédente,

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^{N} P_n(j) u^n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi_k(j) \varphi_{n-k}(N-j) u^n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k} u^n$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{j}{k} \sum_{n=k}^{N} \binom{N-j}{n-k} u^{n-k} u^k = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{j}{k} u^k \sum_{n=0}^{N-k} \binom{N-j}{l} u^l$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k u^k \sum_{n=0}^{N-j} \binom{N-j}{l} u^l = (1-u)^j (1+u) N - j.$$

3. Nous avons

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (1-u)^j (1+u)^{N-j} (1-v)^j (1+v)^{N-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} ((1-u)(1-v))^j ((1+u)(1+v))^{N-j} = ((1-u)(1-v) + (1+u)(1+v))^N$$

$$= (1 - u - v + uv + 1 + u + v + uv)^N = 2^N (1+uv)^N.$$

4. Nous avons

$$F(u,v) = 2^N (1+uv)^N = 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} u^k v^k.$$

Donc

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b} = 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{\partial^{a+b}(u^k v^k)}{\partial u^a \partial v^b} = 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{\partial^a}{\partial u^a} \left(u^k \frac{\partial^b v^k}{\partial v^b} \right) = 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{\partial^a u^k}{\partial u^a} \right) \left(\frac{\partial^b v^k}{\partial v^b} \right)$$

$$= 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(k(k-1)...(k-a+1) u^{k-a} \right) \left(k(k-1)...(k-b+1) v^{k-b} \right).$$

Ainsi

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = 2^N \binom{N}{a} \left(a(a-1)...(a-a+1) \right) \left(b(b-1)...(b-b+1) \right) \mathbb{1}_{\{a=b\}}$$

$$= 2^N \frac{N! a!}{(N-a)!} \mathbb{1}_{\{a=b\}}.$$

5. Soit $(a,b) \in [\![0,N]\!]^2$ tels que $a \neq b$. Alors, d'après la question précédente,
$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = 0.$$
Or nous avons également
$$\frac{\partial^{k+l} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} f_j^{(a)}(0) f_j^{(b)}(0) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} a! P_a(j) b! P_b(j).$$
Donc
$$\langle P_a, P_b \rangle = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P_a(j) P_b(j) = 0.$$
Ainsi $(P_k)_{0 \leq k \leq N}$ est une famille de polynômes orthogonaux. Donc il s'agit d'une famille libre. Or il s'agit également d'une famille à $N+1 = \dim(\mathbb{R}_N[X])$ vecteurs, donc il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.

1. Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de taille p est dense dans $M_p(\mathbb{C})$.
3. Le résultat précédent est-il valable avec $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'adhérence des matrices réelles diagonalisables de taille p dans $M_p(\mathbb{R})$.

Corrigé.

1. Soit $M \in M_p(\mathbb{K})$. Alors le polynôme caractéristique $\xi_M(M)$ est non nul, il admet donc un nombre fini de racines. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \frac{1}{n} \notin \mathrm{Sp}(M).$$
Ainsi
$$\forall n \geq N, M - \frac{1}{n} I_p \in GL_p(\mathbb{K}).$$
De plus
$$M - \frac{1}{n} I_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$
Donc
$$M \in \overline{GL_p(\mathbb{K})}.$$
Ainsi
$$\overline{GL_p(\mathbb{K})} = M_p(\mathbb{K}).$$
2. Soit $M \in M_p(\mathbb{C})$. Alors, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, M est trigonalisable, il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ et $T \in M_p(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, dont on note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs diagonales, telles que
$$M = PTP^{-1}.$$
On considère alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$T_n = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}, ..., \frac{p}{n}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{n} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p + \frac{p}{n} \end{pmatrix}.$$
Alors
$$T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T,$$
et, pour tout $i, j \in [\![1, p]\!]$ distincts,
$$\lambda_i + \frac{i}{n} - \lambda_j - \frac{j}{n} = \lambda_i - \lambda_j + \frac{i-j}{n}.$$
Donc si $\lambda_i = \lambda_j$ alors
$$\lambda_i + \frac{i}{n} - \lambda_j - \frac{j}{n} = \frac{i-j}{n} \neq 0,$$

si $\lambda_i > \lambda_j$ et $i > j$ alors

$$\lambda_i + \frac{i}{n} - \lambda_j - \frac{j}{n} = \lambda_i - \lambda_j + \frac{i-j}{n} > 0,$$

et si $\lambda_i > \lambda_j$ et $i < j$ alors

$$\lambda_i + \frac{i}{n} - \lambda_j - \frac{j}{n} = \lambda_i - \lambda_j + \frac{i-j}{n} \underset{n\to+\infty}{\nearrow} \lambda_i - \lambda_j,$$

donc il existe $N_{ij} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_{ij}, \lambda_i + \frac{i}{n} - \lambda_j - \frac{j}{n} = \lambda_i - \lambda_j + \frac{i-j}{n} > \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2} > 0.$$

Par conséquent il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, les $\lambda_i + \frac{i}{n}$ soient distincts. Ainsi T_n est diagonalisable. Puis, par continuité du produit matriciel,

$$PT_nP^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PTP^{-1} = M.$$

Donc

$$M \in \overline{D_p(\mathbb{C})}.$$

Ainsi

$$\overline{D_p(\mathbb{C})} = M_p(\mathbb{C}).$$

3. La réponse est négative. Par exemple pour $p = 2$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ N & \longmapsto & \Delta(\chi_M) \end{array}$$

continue car polynomiale en les coefficients de N. Or

$$\varphi(M) = \Delta(X^2 + 1) = -4 < 0.$$

Donc, par continuité, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall N \in M_2(\mathbb{R}), \|M - N\| < \delta \Longrightarrow \varphi(N) < 0.$$

Or s'il existe $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_2(\mathbb{R})$ diagonalisables tels que

$$M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

Alors

$$0 \leq \varphi(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(M) < 0,$$

ce qui est contradictoire.

4. Comme à la question 2, on peut montrer que l'ensembles $T_p(\mathbb{R})$ trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est inclus dans l'adhérence des matrices diagonalisables. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in M_p(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D_p(\mathbb{R})$ tel que

$$M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, χ_{M_n} est scindé sur $\mathbb{R}[X]$. De plus l'application

$$\chi : \begin{array}{rcl} M_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_p[X] \\ N & \longmapsto & \chi_N \end{array}$$

est continue car polynomiale en les coefficients de N. Ainsi

$$\chi_{M_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_M.$$

Il ne resterait plus qu'à montrer que χ_M est également scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit que M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent

$$\overline{D_p(\mathbb{R})} = T_p(\mathbb{R}).$$